Name: ____________________

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Gleichungen

$$g(x) = x^2 - x + 1 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$h(x) = -x^2 - 5x + 1 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

(1) *Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für* $x = -2$ *und* $x = 0$ *schneiden.*

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.*

(2 + 4 Punkte)

b) Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = x \cdot e^{2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) *Bestimmen Sie die erste Ableitung.*

Für die zweite Ableitung von f gilt: $f''(x) = (4x+4) \cdot e^{2x+2}$.

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.*

Hinweis: Auf den Nachweis einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

(3 + 3 Punkte)

c) In einer Urne befinden sich drei rote und sieben weiße Kugeln.

(1) Zweimal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine der entnommenen Kugeln weiß ist.

Name: ____________________

(2) Zehnmal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen weißen Kugeln.

Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass keine der folgenden Abbildungen 1 und 2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt.

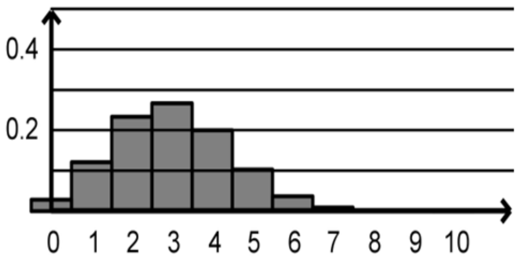


Abbildung 1

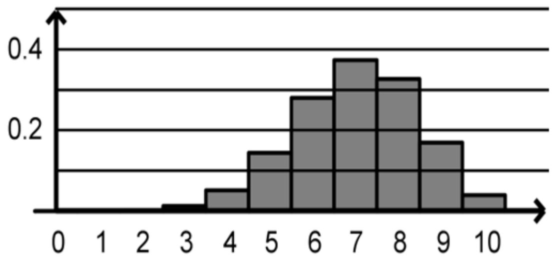


Abbildung 2

(3 + 3 Punkte)

d) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|2|2)$, $B(4|-1|z)$ und $C(-3|y|6)$ mit $y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

(1) B liegt auf der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Wert von z.

(2) *Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens* 5 *beträgt.*

(3 + 3 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = -x^2 - 5x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \cdot (x+2) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = 0.$

(2) $\int_{-2}^{0} \left(g(x) - h(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \left(2x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x$
$= \left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2\right)$
$= 0 - \left(-\frac{16}{3} + 8\right) = \frac{16}{3} - \frac{24}{3} = -\frac{8}{3}.$

Die eingeschlossene Fläche ist $\frac{8}{3}$ FE groß.

Teilaufgabe b)

(1) Mithilfe der Ketten- und Produktregel ergibt sich:
$f'(x) = 1 \cdot e^{2x+2} + 2 \cdot x \cdot e^{2x+2} = (2x+1) \cdot e^{2x+2}.$

(2) Für Wendestellen gilt notwendigerweise:
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (4x+4) \cdot e^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Nur bei $x = -1$ kann eine Wendestelle vorliegen.

Wegen $f(-1) = -e^{2\cdot(-1)+2} = -1$ hat der Wendepunkt die Koordinaten $W(-1 \mid -1)$.

Teilaufgabe c)

(1) Es gilt:

$$P(\text{"höchstens eine Kugel ist weiß"}) = 1 - P(\text{"beide Kugeln sind weiß"})$$

$$= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{51}{100}.$$

(2) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$. Die erste Abbildung kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen, da $E(X) = 7$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei der entnommenen Kugeln weiß sind, nicht am größten.

Die zweite Abbildung kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen, da die Summe der Werte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht größer als 1 ist.

Teilaufgabe d)

(1) Da B auf g liegt, gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$ für ein $r \in \mathbb{R}$.

Aus $0 - r = 4 \Leftrightarrow r = -4$ folgt $z = 2 + (-4) \cdot (-2) = 10$.

(2) Es gilt $\left|\overline{AC}\right| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ y-2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9 + (y-2)^2 + 16}$.

Wegen $(y-2)^2 \geq 0$ beträgt der Abstand von A und C mindestens $\sqrt{9+16} = 5$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -2$ und $x = 0$ schneiden.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt f'.	3			
2	(2) bestimmt die Koordinaten des Wendepunktes.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
2	(2) begründet, dass keine der beiden Abbildungen die Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X* darstellt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Wert von z.	3			
2	(2) zeigt, dass der Abstand von *A* und *C* mindestens 5 beträgt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Zahl der Haushalte in Deutschland, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind, wächst ständig. Aber nicht alle erreichbaren Haushalte nutzen auch ihre Anschlüsse.

Abbildung 1 zeigt die Anzahl der Haushalte mit genutztem Glasfaseranschluss (im Folgenden Glasfaserhaushalte genannt) für die Jahre 2011 bis 2017. Dabei wird auf der t-Achse die Zeit in Jahren seit dem 01.01.2011 und auf der y-Achse die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend angegeben.

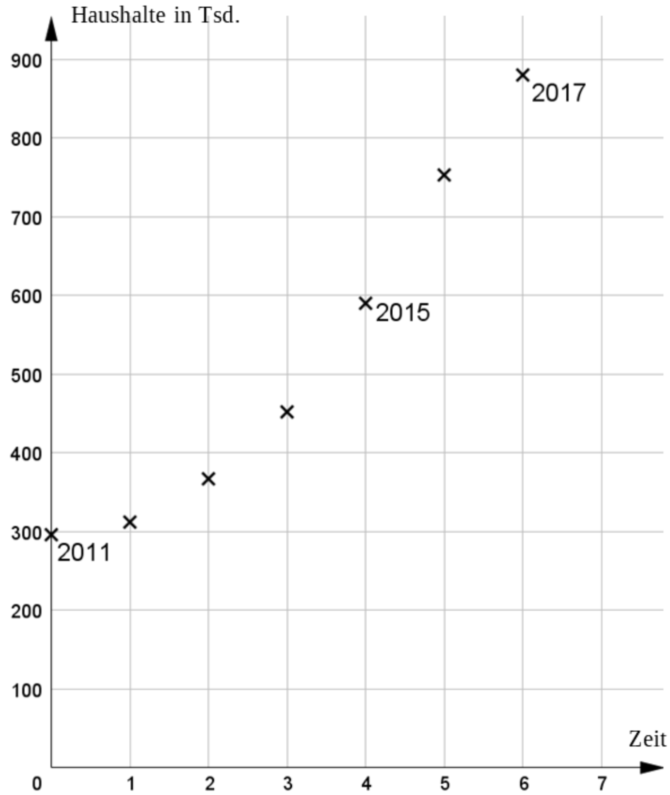


Abbildung 1

Name: ____________________

a) Die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend wird durch eine Exponentialfunktion f der Form $f(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ modelliert, deren Graph durch die Punkte $P_1(0 \mid 296)$ und $P_2(4 \mid 590)$ verläuft. Diese Funktion soll für Prognosen bis zum Jahr 2026 $(t = 15)$ genutzt werden.

(1) *Geben Sie den Parameter a an und bestimmen Sie b auf drei Nachkommastellen genau.*

Im Folgenden soll mit $f(t) = 296 \cdot e^{0{,}17 \cdot t}$ weitergearbeitet werden.

(2) Im Jahr 2017 wurden in einer Erhebung ca. 880.000 Glasfaserhaushalte gezählt.

Bestimmen Sie die sinnvoll gerundete Anzahl der Glasfaserhaushalte, die sich bei der Modellierung mit der Funktion f für den 01.01.2017 *ergibt.*

Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung zu dem Wert aus der Erhebung.

(3) *Bestimmen Sie im Modell für $0 \le t \le 15$ den Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Glasfaserhaushalte am schnellsten wächst.*

Bestimmen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.

(4 + 4 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Neben der Anzahl der Haushalte mit genutztem Glasfaseranschluss wird auch die Gesamtzahl der Haushalte erhoben, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind, unabhängig davon, ob sie ihn nutzen oder nicht. Diese Zahl der erreichbaren Haushalte wird durch die Funktion g mit $g(t) = 416{,}5t + 434$ modelliert. Dabei wird auf der t-Achse die Zeit (in Jahren) seit dem 01.01.2011 und auf der y-Achse die Anzahl der Haushalte in Tausend angegeben (siehe *Abbildung 2*).

b) (1) *Bestimmen Sie* $\frac{f(4)}{g(4)}$ *und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt der Funktion* d *mit* $d(t) = g(t) - f(t),\ 0 \le t \le 15$.

(3) *Interpretieren Sie die Bedeutung des Hochpunktes der Funktion* d *im Sachzusammenhang.*

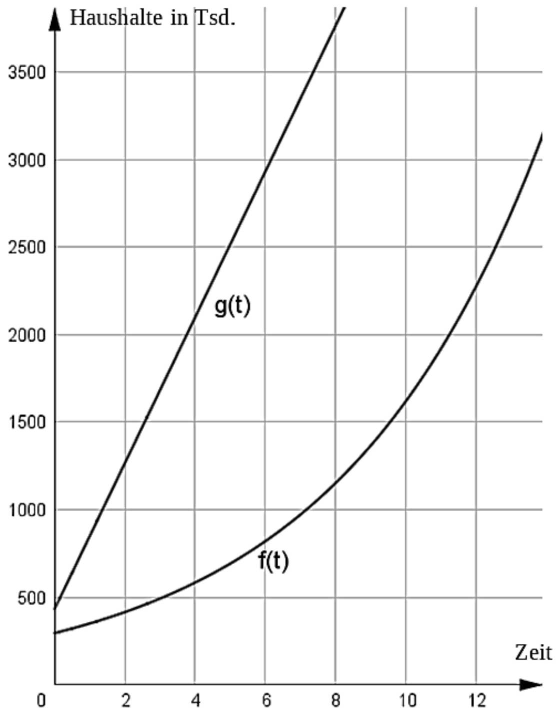


Abbildung 2

(4 + 7 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Es wird prognostiziert, dass der Markt für Glasfaseranschlüsse im weiteren Verlauf in eine Sättigungsphase eintritt, da eine zunehmende Zahl von Haushalten bereits über einen Glasfaseranschluss verfügt. Im Folgenden wird die Funktion f nur zur Prognose der Anzahl von Glasfaserhaushalten in Tausend bis zum 01.01.2026 $(t \leq 15)$ genutzt. Der momentane Zuwachs der Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend pro Jahr ab dem 01.01.2026 $(t \geq 15)$ wird durch die **Änderungsrate** z mit der Funktionsgleichung
$z(t) = 50{,}32 \cdot e^{6{,}99 - 0{,}296 \cdot t}$ modelliert.

c) (1) *Bestimmen Sie im Modell die Anzahl der Glasfaserhaushalte am* 01.01.2026.

Bestimmen Sie die Anzahl der Glasfaserhaushalte, die gemäß der Modellierung vom 01.01.2026 *bis zum* 01.01.2036 *hinzukommen.*

(2) *Geben Sie einen Ansatz für einen Funktionsterm einer Funktion* h *an, der für* $t \geq 15$ *die Anzahl der Glasfaserhaushalte in Tausend modelliert. Eine Vereinfachung oder Berechnung ist nicht erforderlich.*

(3) Es gilt die Aussage: $z(t) > 0$ und $z'(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

[Ein Nachweis ist nicht erforderlich.]

Interpretieren Sie diese Aussage für $t \geq 15$ *im Sachzusammenhang.*

(6 + 4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei $p(x)$ ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $a = 296$.

$f(4) = 590 \Rightarrow 296e^{b\cdot 4} = 590 \Rightarrow b \approx 0{,}172$.

(2) $f(6) \approx 820{,}866$.

Die Anzahl der Glasfaserhaushalte beträgt ungefähr $820\,000$.

$\frac{f(6)}{880} \approx 0{,}933$.

Die Abweichung beträgt ungefähr $6{,}7\,\%$.

(3) Es gilt: $f'(t) = 50{,}32 \cdot e^{0{,}17\cdot t}$.

Gesucht ist das Maximum der Ableitungsfunktion f' für $0 \le t \le 15$.

Der Taschenrechner liefert $t = 15$.

$f'(15) \approx 644{,}45$.

Die Anzahl der Glasfaserhaushalte wächst im Modell für $t = 15$ am schnellsten, also am Ende der ersten fünfzehn Jahre mit einer Geschwindigkeit von ca. $640\,000$ [Haushalten pro Jahr].

Teilaufgabe b)

(1) $\frac{f(4)}{g(4)} \approx 0{,}28$. Der Wert beschreibt zum Zeitpunkt $t = 4$ [also am 01.01.2015] den Anteil der Glasfaserhaushalte an den Haushalten, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind.

(2) $d(t) = 416{,}5 \cdot t + 434 - 296 \cdot e^{0{,}17t}$.

$d'(t) = 416{,}5 - 50{,}32e^{0{,}17t}$.

Notwendige Bedingung:

$d'(t_E) = 0 \Rightarrow t_E \approx 12{,}43$.

Hinreichende Bedingung:

$d''(t) = -8{,}5544e^{0{,}17t}$.

$d'(t_E) = 0$ und $d''(t_E) \approx -70{,}805 \Rightarrow d''(t_E) < 0$.

Damit ist das gesuchte Extremum ein Hochpunkt.

$d(t_E) \approx 3162{,}04 \Rightarrow H(12{,}43 | 3162{,}04)$.

(3) Die Funktion *d* modelliert die Anzahl der Haushalte, die über einen Glasfaseranschluss erreichbar sind, diesen aber nicht nutzen. Im Hochpunkt ist diese Anzahl [lokal betrachtet] maximal.

Teilaufgabe c)

(1) $f(15) \approx 3790{,}90$.

Die Anzahl der Glasfaserhaushalte beträgt im Modell am 01.01.2026 ca. 3,79 Millionen.

$\int_{15}^{25} z(t)\,\mathrm{d}t \approx 2064{,}39$.

Im Zeitraum vom 01.01.2026 bis zum 01.01.2036 nimmt die Anzahl der Glasfaserhaushalte voraussichtlich um ca. $2\,060\,000$ zu.

(2) Ein möglicher Ansatz lautet: $h(t) = f(15) + \int_{15}^{t} z(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) $z(t) > 0$ und $z'(t) < 0$: Die Anzahl der Glasfaserhaushalte wächst im Modell ab $t = 15$ über den gesamten Zeitraum. Allerdings wächst die Anzahl der Glasfaserhaushalte immer langsamer.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt den Parameter *a* an und bestimmt *b* auf drei Nachkommastellen genau.	4			
2	(2) bestimmt die sinnvoll gerundete Anzahl der Glasfaserhaushalte.	2			
3	(2) ermittelt die prozentuale Abweichung.	2			
4	(3) bestimmt den Zeitpunkt mit der höchsten Wachstumsgeschwindigkeit und die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Wert.	2			
2	(1) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) bestimmt die erste Ableitung der Funktion *d*.	2			
4	(2) bestimmt den möglichen Extrempunkt mithilfe der notwendigen Bedingung.	2			
5	(2) bestätigt den Hochpunkt mit einer hinreichenden Bedingung und bestimmt den Funktionswert.	3			
6	(3) interpretiert die Bedeutung des Hochpunktes im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Anzahl der Glasfaserhaushalte am 01.01.2026.	2			
2	(1) bestimmt die Anzahl der Glasfaserhaushalte, die im angegebenen Zeitraum hinzukommen.	4			
3	(2) gibt einen Ansatz für den gesuchten Funktionsterm an.	4			
4	(3) interpretiert die Aussage im Sachzusammenhang.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Für jede reelle Zahl $k > 0$ ist durch die Gleichung

$$f_k(x) = x^3 - k \cdot x, \quad x \in \mathbb{R},$$

eine Funktion f_k gegeben.

a) (1) Die in der nebenstehenden *Abbildung 1* dargestellten Graphen I, II und III gehören jeweils zu einem der Werte $k=1$, $k=2$ und $k=3$.

Entscheiden Sie, welcher Wert zu welchem Graphen gehört.

(2) *Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den der Punkt* $(0{,}5\,|\,-1)$ *auf dem Graphen von* f_k *liegt.*

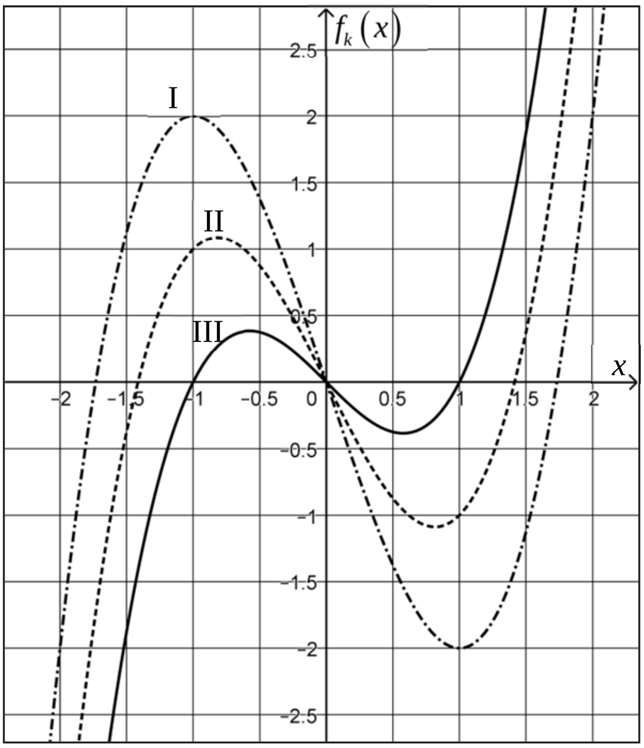


Abbildung 1

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Im Folgenden wird die konkrete Funktion f_1 mit der Gleichung

$$f_1(x) = x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

betrachtet.

b) *Untersuchen Sie die Funktion f_1 rechnerisch auf lokale Extremstellen.*

(7 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die für $x \leq 0$ vom Graphen von f_1 und der x-Achse eingeschlossen wird.*

(2) In der folgenden *Abbildung 2* sehen Sie den Graphen von f_1 und eine Gerade $g_a : y = a \cdot x$, die den Graphen von f_1 an drei Stellen $x = s_1$, $x = 0$ und $x = s_3$ schneidet.

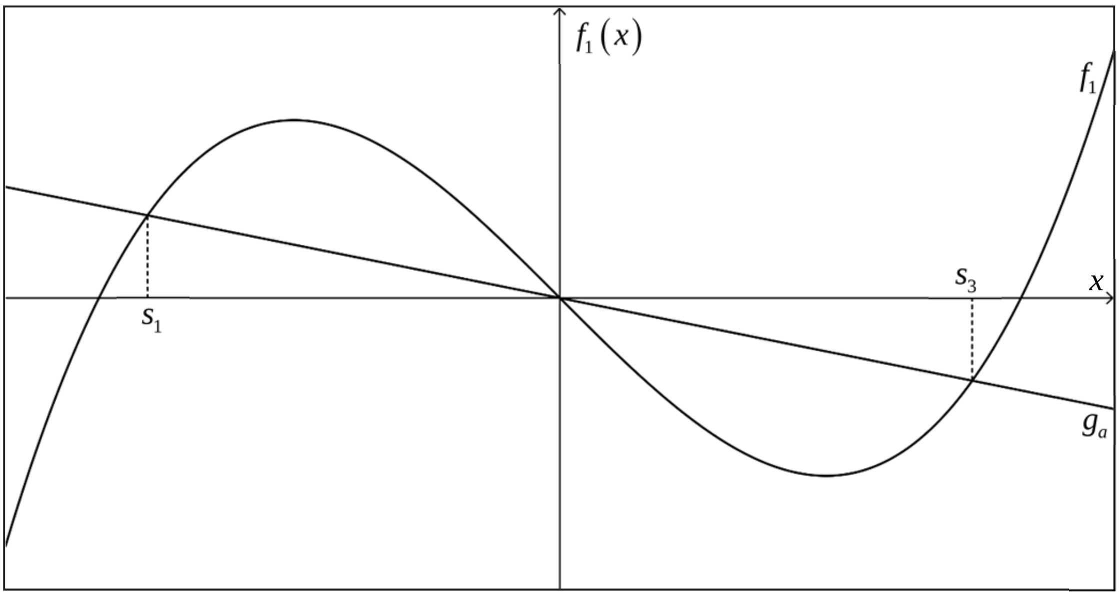


Abbildung 2

Geben Sie für die in Abbildung 2 dargestellte Situation ***ohne weitere Berechnung*** *den Wert des Integrals* $\int_{s_1}^{s_3} \left(f_1(x) - a \cdot x\right) \mathrm{d}x$ *an.*

Begründen Sie Ihre Angabe.

(6 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Zur leichteren Bearbeitung ist auf dieser Seite die *Abbildung 3* eingefügt. Sie stimmt mit der *Abbildung 1* (Seite 1) überein.

d) (1) *Zeichnen Sie die Gerade* $t: y = -0{,}25 \cdot x + 0{,}25$ *in die Abbildung 3 ein.*

(2) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass t eine Tangente an den Graphen von* f_1 *ist.*

(3) Die Tangente *t* und der Graph von f_1 schließen eine Fläche ein. *Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.*

(4) *Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl* $r > 0$ *ist die Gerade durch die Punkte* $A_r\left(-r \middle| f_1(-r)\right)$ *und* $B_r\left(2 \cdot r \middle| f_1(2 \cdot r)\right)$ *eine Tangente an den Graphen von* f_1 *im Punkt* A_r.

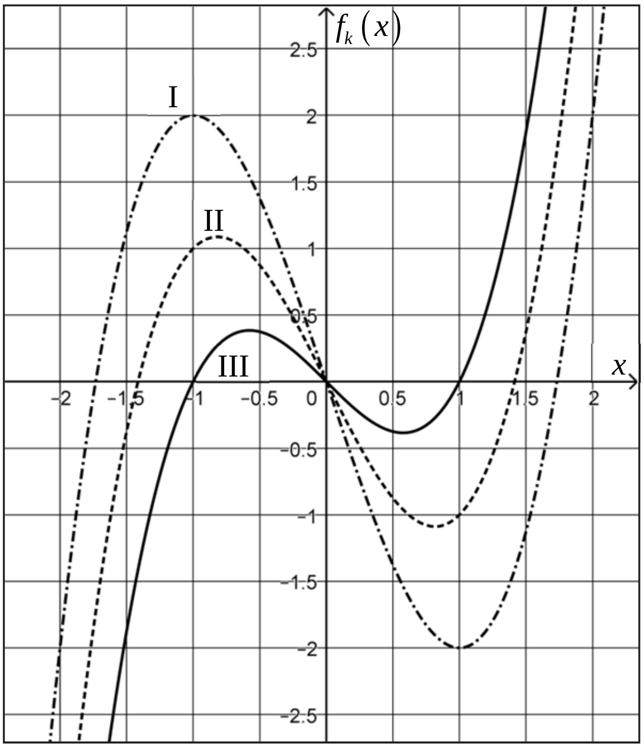


Abbildung 3

(2 + 5 + 4 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     – einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $k=1 \rightarrow \mathrm{III}$; $k=2 \rightarrow \mathrm{II}$; $k=3 \rightarrow \mathrm{I}$.

(2) $f_k(0{,}5)=-1\ [\Leftrightarrow 0{,}5^3-k\cdot 0{,}5=-1] \overset{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} k=2{,}25$.

Teilaufgabe b)

$f_1'(x)=3\cdot x^2-1$.

Aus der notwendigen Bedingung $f_1'(x)=0$ für lokale Extremstellen ergeben sich aus

$3\cdot x^2-1=0$ die beiden Lösungen $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}\approx -0{,}58$ und $x=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}58$.

Wegen $f_1'(-1)=2>0$, $f_1'(0)=-1<0$ und $f_1'(1)=2>0$ liegt an der Stelle $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f_1' und damit ein lokales Maximum von f_1 und an der Stelle $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f_1' und damit ein lokales Minimum von f_1 vor.

Teilaufgabe c)

(1) $f_1(x)=0\ [\Leftrightarrow x^3-x=0] \overset{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x=-1 \vee x=0 \vee x=1$.

Eine Stammfunktion von f_1 ist die Funktion F_1 mit $F_1(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4-\frac{1}{2}\cdot x^2$.

$\int\limits_{-1}^{0} f_1(x)\,\mathrm{d}x=\left[F_1(x)\right]_{-1}^{0}=F_1(0)-F_1(-1)=\frac{1}{4}=0{,}25$.

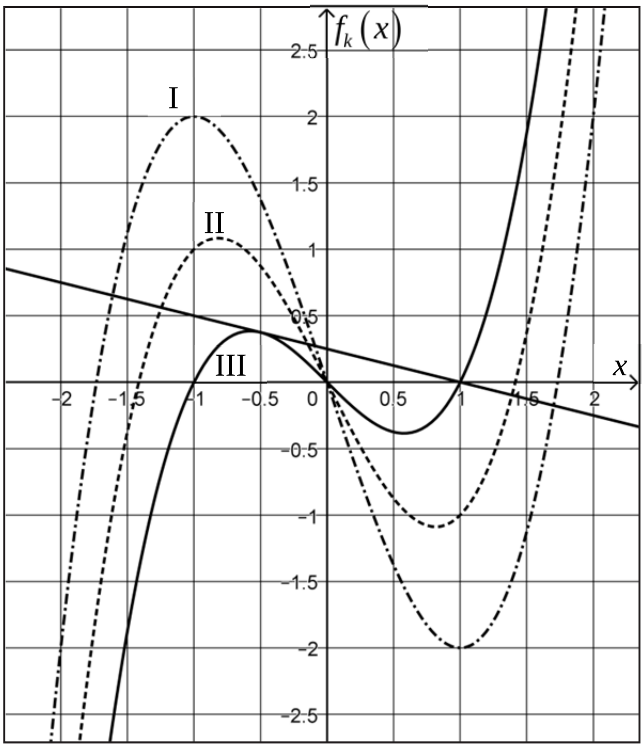
Der Inhalt der Fläche, die für $x\le 0$ vom Graphen von f_1 und der x-Achse eingeschlossen wird, beträgt 0,25 FE.

(2) $\int\limits_{s_1}^{s_3}\left(f_1(x)-a\cdot x\right)\mathrm{d}x=0$.

Der Graph von f_1 und die Gerade g_a verlaufen punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da in beiden Gleichungen nur ungerade Exponenten von x auftreten. Daher gilt $s_1=-s_3$ und die beiden Flächen, die in den Intervallen $[s_1;0]$ und $[0;s_3]$ zwischen den Graphen von f_1 und der Geraden g_a eingeschlossen sind, besitzen den gleichen Flächeninhalt. Im Intervall $[s_1;0]$ ist f_1 die obere Randfunktion der eingeschlossenen Fläche, im Intervall $[0;s_3]$ ist f_1 die untere Randfunktion. Daher heben sich die orientierten Flächeninhalte in der Bilanz auf.

Teilaufgabe d)

(1)



(2) Stellen, an denen der Graph von f_1 die Steigung $-0,25$ besitzt:

$f_1{}'(x) = -0,25 \ [\Leftrightarrow 3 \cdot x^2 - 1 = -0,25] \overset{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x = -0,5 \vee x = 0,5$.

Wegen $f_1(-0,5) = 0,375 = -0,25 \cdot (-0,5) + 0,25$ ist t die Tangente an den Graphen von f_1 an der Stelle $x = -0,5$.

(3) $f_1(x) = -0,25 \cdot x + 0,25 \overset{\text{GTR}}{\Leftrightarrow} x = -0,5 \vee x = 1$.

$$\int_{-0,5}^{1} \left(t(x) - f_1(x)\right) \mathrm{d}x \overset{\text{GTR}}{=} \frac{27}{64} \approx 0,42.$$

Der Inhalt der Fläche, die von der Tangente t und dem Graphen von f_1 eingeschlossen wird, beträgt ungefähr 0,42 FE.

(4) Für die Steigung m_r einer Geraden durch die Punkte A_r und B_r gilt:

$$m_r = \frac{f_1(2\cdot r) - f_1(-r)}{3\cdot r}$$

$$= \frac{(2\cdot r)^3 - 2\cdot r - \left((-r)^3 - (-r)\right)}{3\cdot r}$$

$$= \frac{8\cdot r^3 - 2\cdot r + r^3 - r}{3\cdot r}$$

$$= \frac{9\cdot r^3 - 3\cdot r}{3\cdot r} = 3\cdot r^2 - 1\,.$$

Für die Steigung des Graphen von f_1 im Punkt $A_r\left(-r \middle| f_1(-r)\right)$ gilt:

$$f_1'(-r) = 3\cdot(-r)^2 - 1 = 3\cdot r^2 - 1\,.$$

Da die Steigung m_r der Geraden durch die Punkte A_r und B_r mit der Steigung des Graphen von f_1 im Punkt $A_r\left(-r \middle| f_1(-r)\right)$ übereinstimmt, und da der Punkt A_r ein gemeinsamer Punkt des Graphen von f_1 und der Geraden durch A_r und B_r ist, handelt es sich bei dieser Geraden um eine Tangente an den Graphen von f_1 im Punkt A_r.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, welcher Wert zu welchem Graphen gehört.	3			
2	(2) ermittelt denjenigen Wert von k, für den der Punkt $(0{,}5 \mid -1)$ auf dem Graphen von f_k liegt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt mit einer notwendigen Bedingung die möglichen lokalen Extremstellen von f_1.	3			
2	untersucht mit einer hinreichenden Bedingung die Funktion f_1 rechnerisch auf lokale Extremstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt rechnerisch die erforderlichen Nullstellen der Funktion f_1.	2			
2	(1) bestimmt rechnerisch den Inhalt der Fläche, die für $x \leq 0$ vom Graphen von f_1 und der *x*-Achse eingeschlossen wird.	4			
3	(2) gibt für die in *Abbildung 2* dargestellte Situation ohne weitere Berechnung den Wert des Integrals $\int_{s_1}^{s_3} \left(f_1(x) - a \cdot x\right) \mathrm{d}x$ an.	2			
4	(2) begründet seine Angabe.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeichnet die Gerade $t: y = -0{,}25 \cdot x + 0{,}25$ in die *Abbildung 3* ein.	2			
2	(2) weist rechnerisch nach, dass *t* eine Tangente an den Graphen von f_1 ist.	5			
3	(3) ermittelt den Inhalt der Fläche, die von der Tangente *t* und dem Graphen von f_1 eingeschlossen wird.	4			
4	(4) zeigt: Für jede reelle Zahl $r > 0$ ist die Gerade durch die Punkte $A_r\left(-r \middle\vert f_1(-r)\right)$ und $B_r\left(2 \cdot r \middle\vert f_1(2 \cdot r)\right)$ eine Tangente an den Graphen von f_1 im Punkt A_r.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

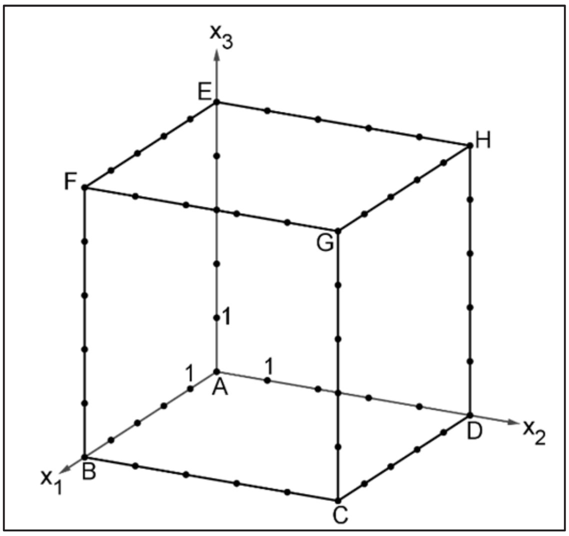
Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Abbildung zeigt den Würfel *ABCDEFGH* mit $G(5|5|5)$ und $H(0|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Punkte $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$ liegen jeweils auf einer Kante des Würfels.



Abbildung

a) *Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und F an.*

(2 Punkte)

b) *Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.*

(4 Punkte)

c) Das Viereck *IJKL* liegt in einer Ebene *Q*.
Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene Q auf.

[Mögliche Lösung: $Q\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$]

(4 Punkte)

Name: ______________________

d) *Stellen Sie die Raumdiagonale* $\overline{AG}$ *in Parameterform dar.*

Berechnen Sie den Schnittpunkt U von $\overline{AG}$ *und der Ebene Q.*

(7 Punkte)

e) *Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei Seiten gleich lang sind.*

Weisen Sie nach, dass die Seite $\overline{IL}$ *des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite* $\overline{JK}$.

(6 Punkte)

f) *Berechnen Sie die Größe eines Innenwinkels des Trapezes IJKL.*

(4 Punkte)

g) Der Punkt $P(4\,|\,0\,|\,2)$ liegt auf der Strecke $\overline{IL}$.

Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{JP}$ *auf* $\overrightarrow{IL}$ *senkrecht steht.*

(3 Punkte)

h) *Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes IJKL.*

(5 Punkte)

i) Gegeben ist die Ebene *S*: $\vec{x} = v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $v, w \in \mathbb{R}$.

Der Punkt *K* liegt in einer Ebene *T*, die parallel zu *S* ist.

Untersuchen Sie, ob auch der Punkt L in T liegt.

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

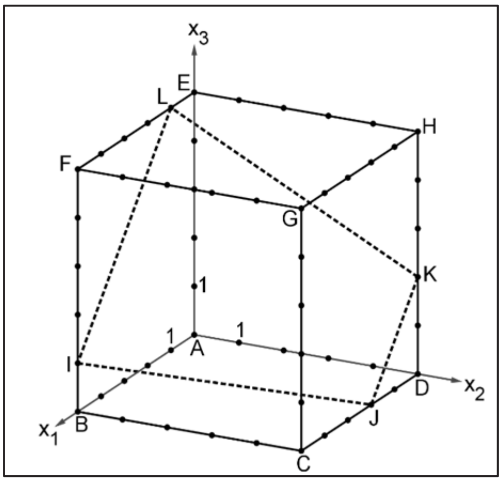
6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Es gilt $D(0|5|0)$ und $F(5|0|5)$.

Teilaufgabe b)



Teilaufgabe c)

Mit $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist $Q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$ eine Parametergleichung der Ebene.

Teilaufgabe d)

$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in [0;5]$, ist eine Parameterform der Raumdiagonalen $\overline{AG}$.

Aus $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem $\begin{array}{l} -t - 5 \cdot k - 6 \cdot l = 2 \\ -t + 5 \cdot k + 5 \cdot l = -5 \\ -t + k + 2 \cdot l = -4 \end{array}$.

$t = \frac{15}{7}$, $k = \frac{5}{7}$ und $l = -\frac{9}{7}$ lösen das Gleichungssystem.

Mit $t = \frac{15}{7} \in [0;5]$ ergibt sich $U\left(\frac{15}{7} \,\middle|\, \frac{15}{7} \,\middle|\, \frac{15}{7}\right)$.

Teilaufgabe e)

Aus $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{IL}$ folgt, dass die Seiten $\overline{IL}$ und $\overline{JK}$ parallel zueinander sind und

damit ist das Viereck *IJKL* ein Trapez.

Es gilt $\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\overrightarrow{KL}\right|$ und damit sind zwei Seiten des Trapezes

gleich lang.

Aus $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{IL}$ folgt auch, dass die Seite $\overline{IL}$ doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.

Teilaufgabe f)

Für den Innenwinkel α mit dem Scheitelpunkt *I* gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{12 - 4}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{32}} = \frac{8}{\sqrt{1120}} \approx 0{,}239.$$ Daraus folgt $\alpha \approx 76^\circ$.

Teilaufgabe g)

Aus $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{JP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 8 = 0$ folgt, dass $\overrightarrow{IL}$ auf $\overrightarrow{JP}$ senkrecht steht.

Teilaufgabe h)

Aus g) folgt, dass der Abstand der Punkte *J* und *P* die Höhe *h* des Trapezes angibt, d. h.

$h = \left|\overrightarrow{JP}\right| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33}$ [LE].

Damit gilt für den Flächeninhalt:

$0{,}5 \cdot \left(\left|\overrightarrow{IL}\right| + \left|\overrightarrow{JK}\right|\right) \cdot \sqrt{33} = 0{,}5 \cdot 3 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{33} = 3 \cdot \sqrt{66}$ [FE].

[Auch ein trigonometrischer Ansatz über den Innenwinkel aus f) ist vorstellbar.]

Teilaufgabe i)

$T\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $i, j \in \mathbb{R}$ ist eine Parameterdarstellung von *T*.

Aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem $\begin{matrix} -i - 5 \cdot j = 1 \\ -5i + 5j = -5 \\ 5i + j = 3 \end{matrix}$.

$i = \frac{2}{3}$ und $j = -\frac{1}{3}$ lösen das Gleichungssystem. Daraus folgt, dass *L* in *T* liegt.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Koordinaten der Eckpunkte *D* und *F* an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**2**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeichnet das Viereck *IJKL* in die Abbildung ein.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	stellt eine Parametergleichung der Ebene *Q* auf.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	stellt die Raumdiagonale $\overline{AG}$ in Parameterform dar.	3			
2	berechnet den Schnittpunkt U von $\overline{AG}$ und der Ebene Q.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**7**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass das Viereck *IJKL* ein Trapez ist, in dem zwei Seiten gleich lang sind.	4			
2	weist nach, dass die Seite $\overline{IL}$ des Trapezes doppelt so lang ist wie die Seite $\overline{JK}$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**6**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Größe eines Innenwinkels des Trapezes *IJKL*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**4**			

Teilaufgabe g)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass $\overrightarrow{JP}$ auf $\overrightarrow{IL}$ senkrecht steht.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe g)	**3**			

Teilaufgabe h)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Flächeninhalt des Trapezes *IJKL*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe h)	**5**			

Teilaufgabe i)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht, ob L in T liegt.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe i)	**5**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Katja isst sehr gerne Gummibärchen. Ihre Mutter möchte verhindern, dass Katja zu viele Gummibärchen auf einmal isst. Die beiden vereinbaren, einmal täglich ein Spiel mit dem folgenden Glücksrad und Spielbrett durchzuführen:

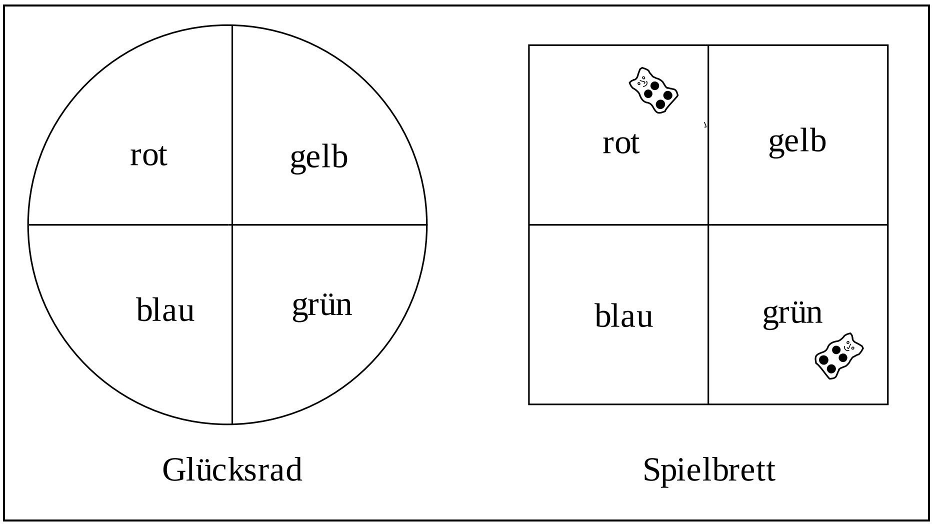


Abbildung 1

Das Glücksrad hat vier gleich große Sektoren mit den Farben rot, gelb, grün und blau. Das zugehörige Spielbrett besteht aus 4 Feldern in den gleichen Farben. Zu Beginn des Spiels ist das Spielbrett leer. Mit dem Glücksrad aus *Abbildung 1* wird eine der 4 Farben bestimmt. Ist das Feld mit dieser Farbe leer, so wird dieses mit einem Gummibärchen belegt. Liegt bereits ein Gummibärchen in diesem Feld, dann erhält Katja das Gummibärchen, sodass das Feld danach wieder leer ist. Das Spiel endet, wenn alle 4 Felder belegt sind und Katja erhält die vier auf dem Spielbrett liegenden Gummibärchen.

Name: ____________________

Das Spiel kann als stochastischer Prozess mit den Zuständen Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 modelliert werden. Dabei beschreibt der Zustand Z_0 ein leeres Spielbrett und Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 beschreiben die Zustände mit genau einem, zwei, drei oder vier Gummibärchen auf dem Spielbrett. Das Spiel endet, sobald der Zustand Z_4 erreicht ist.

a) Auf dem Spielbrett liegen zwei Gummibärchen. Das Spiel befindet sich also im Zustand Z_2.

Ermitteln Sie alle möglichen Zustände, die nach zwei weiteren Glücksraddrehungen auftreten können.

(4 Punkte)

b) Das Histogramm in der folgenden *Abbildung 2* gibt für jedes *n* mit $n \leq 25$, die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ dafür an, dass sich ein Spiel ab dem Spielbeginn nach **höchstens** *n* Glücksraddrehungen im Zustand Z_4 befindet.

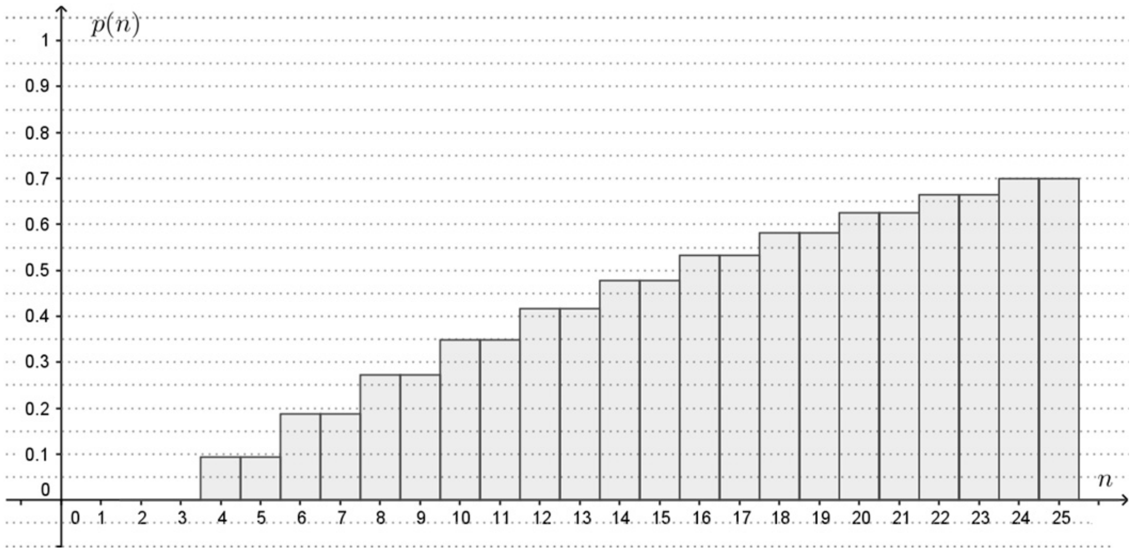


Abbildung 2

(1) *Begründen Sie im Sachkontext, weshalb* $p(n) = 0$ *für* $n \leq 3$ *ist.*

(2) *Geben Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spiel nach höchstens* 25 *Glücksraddrehungen beendet ist.*

(2 + 2 Punkte)

Name: ______________________

c) Die folgende Matrix A modelliert die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4.

$$\begin{array}{cccc} & & & \text{von:} \\ & & & \begin{array}{ccccc} Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{array} \\ & \begin{array}{c} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{array} & & \\ \text{nach:} & & A = & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) *Erstellen Sie ein zu A passendes Übergangsdiagramm mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.*

(2) *Bestimmen Sie das Matrix-Vektor-Produkt* $A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und interpretieren Sie die ersten beiden Komponenten des Ergebnisvektors im Sachzusammenhang.*

(3) *Bestimmen Sie mithilfe der Matrix A die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:*
(Zur Erinnerung: Zum Spielbeginn ist das Spielbrett leer.)

E_1: Ab dem Spielbeginn endet ein Spiel nach höchstens 12 Glücksraddrehungen.

E_2: Ab dem Spielbeginn endet ein Spiel nach genau 12 Glücksraddrehungen.

E_3: Ab dem Spielbeginn liegen nach 9 Glücksraddrehungen genau 2 Gummibärchen auf dem Spielfeld.

E_4: Ab dem Spielbeginn liegen nach 9 Glücksraddrehungen höchstens 2 Gummibärchen auf dem Spielfeld.

(5 + 5 + 11 Punkte)

Name: ______________________

d) Während eines Spiels wechselt mit jeder Glücksraddrehung die Anzahl der Gummibärchen auf dem Spielfeld. Entweder kommt ein Gummibärchen dazu (Vorwärtsschritt in Richtung Z_4) oder Katja erhält ein Gummibärchen vom Spielbrett (Rückwärtsschritt in Richtung Z_0). Immer erhält Katja am Spielende die vier Gummibärchen auf dem Spielbrett.

(1) Ein Spiel endet nach 6 Glücksraddrehungen.
Geben Sie begründet an, wie viele Gummibärchen Katja insgesamt bekommen hat.

(2) *Begründen Sie, dass am Ende eines Spiels genau vier Vorwärtsschritte mehr als Rückwärtsschritte aufgetreten sind.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Katja am Ende eines Spiels höchstens* 10 *Gummibärchen erhalten hat*.

(3 + 3 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Folgende Zustandsänderungen sind möglich:

$Z_2 \to Z_1 \to Z_0$, $Z_2 \to Z_1 \to Z_2$, $Z_2 \to Z_3 \to Z_2$ und $Z_2 \to Z_3 \to Z_4$.

Wenn sich ein Spiel im Zustand Z_2 befindet, können nach zwei Drehungen die Zustände Z_0, Z_2 und Z_4 angenommen werden.

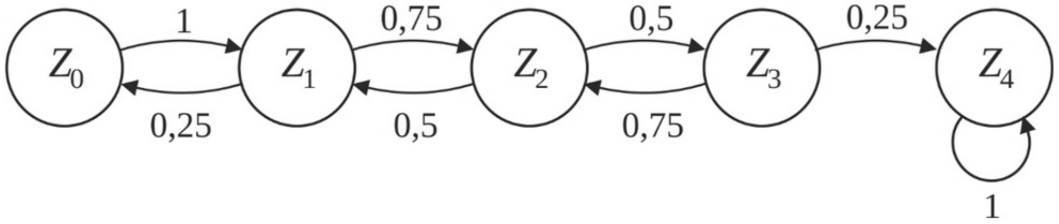
Teilaufgabe b)

(1) Für $n \leq 3$ ist $p(n) = 0$,weil ein Spiel frühestens nach 4 Glücksraddrehungen enden kann.

(2) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nach höchstens 25 Glücksraddrehungen beendet wird, beträgt näherungsweise 70 %.

Teilaufgabe c)

(1)



(2) Es ist $A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}1057 \\ 0 \\ 0{,}5457 \\ 0 \\ 0{,}3486 \end{pmatrix}$.

Ab Spielbeginn befindet sich nach 10 Glücksraddrehungen mit einer Wahrscheinlichkeit von näherungsweise 10,57 % kein Gummibärchen auf dem Spielbrett. Es ist nicht möglich, dass sich nach 10 Glücksraddrehungen genau ein Gummibärchen auf dem Spielfeld befindet.

(3) Mithilfe der folgenden Matrix-Vektor-Produkte können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden:

$$A^{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0946 \\ 0 \\ 0{,}4885 \\ 0 \\ 0{,}4168 \end{pmatrix}, \quad A^{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}3785 \\ 0 \\ 0{,}2728 \\ 0{,}3486 \end{pmatrix}, \quad A^{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}4229 \\ 0 \\ 0{,}3047 \\ 0{,}2725 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$P(E_1) \approx 0{,}4168$,

$P(E_2) \approx 0{,}4168 - 0{,}3486 = 0{,}0682$,

$P(E_3) = 0$ und

$P(E_4) \approx 0 + 0{,}4229 + 0 = 0{,}4229$.

Teilaufgabe d)

(1) Wenn ein Spiel nach genau 6 Glücksraddrehungen beendet ist, muss es neben den 4 Vorwärtsschritten von Z_0 nach Z_4 genau einen Rückwärtsschritt gefolgt von einem Vorwärtsschritt gegeben haben. Insgesamt hat Katja 5 Gummibärchen bekommen.

(2) Ein Spiel beginnt im Zustand Z_0 und endet im Zustand Z_4, wofür ohne Rückwärtsschritte 4 Vorwärtsschritte erforderlich sind. Für jeden Rückwärtsschritt muss genau ein Vorwärtsschritt gemacht werden, damit das Spiel den Zustand Z_4 erreicht. Die gesamte Anzahl ist somit die Summe aus den 4 Vorwärtsschritten und jeweils gleich vielen Vor- und Rückwärtsschritten.

(3) Wenn Katja nach einem Spiel höchstens 10 Gummibärchen erhalten hat, dann gab es höchstens 6 Rückwärtsschritte und damit höchstens 10 Vorwärtsschritte. Also war das Spiel nach höchstens 16 Glücksraddrehungen beendet. Es ist

$$A^{16} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0759 \\ 0 \\ 0{,}3916 \\ 0 \\ 0{,}5326 \end{pmatrix}.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt näherungsweise 53 %.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	ermittelt alle möglichen Zustände, die nach zwei weiteren Glücksraddrehungen auftreten können.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**4**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, weshalb $p(n)=0$ für $n \le 3$ ist.	2			
2	(2) gibt einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Spiel nach höchstens 25 Glücksraddrehungen beendet ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erstellt ein zu *A* passendes Übergangsdiagramm mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.	5			
2	(2) bestimmt das Matrix-Vektor-Produkt.	2			
3	(2) interpretiert die ersten beiden Komponenten des Ergebnisvektors im Sachzusammenhang.	3			
4	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1.	3			
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_2.	3			
6	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3.	2			
7	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_4.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (21) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**21**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt begründet an, wie viele Gummibärchen Katja insgesamt bekommen hat.	3			
2	(2) begründet, dass am Ende eines Spiels genau vier Vorwärtsschritte mehr als Rückwärtsschritte aufgetreten sind.	3			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass Katja am Ende eines Spiels höchstens 10 Gummibärchen erhalten hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

a) (1) Es gilt $P(X = 210) \approx 2{,}2\,\%$.

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als* 210 *Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.*

(4) *Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als* 10 % *ist.*

(5) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das abgebildete Baumdiagramm dargestellt wird.*

Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ *beträgt.*

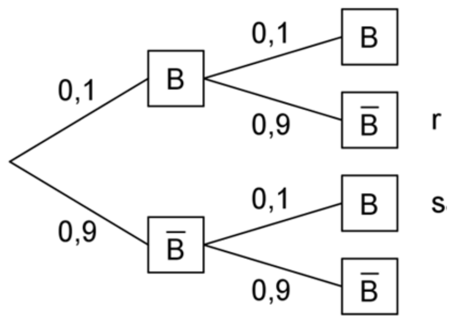


Abbildung 1

(2 + 3 + 6 + 4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) *Abbildung 2* zeigt das Histogramm zu $P_{2000;0,1}(X=k)$.

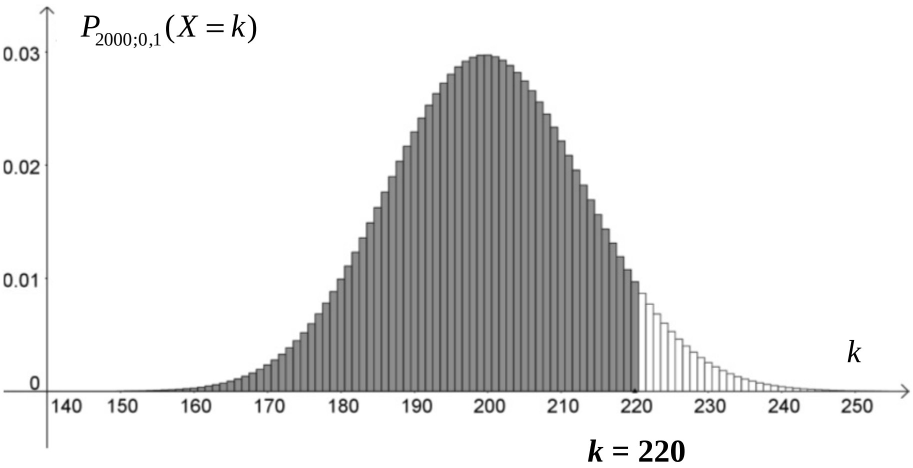


Abbildung 2

(1) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang eine Fragestellung, die zu der in Abbildung 2 dargestellten Situation passt.*

(2) *Bestimmen Sie die in Abbildung 2 dunkel dargestellte Wahrscheinlichkeit auf vier Nachkommastellen genau.*

(3 + 2 Punkte)

c) Auf dem Gelände des Schwimmbades wird ein Kiosk betrieben. Der Besitzer nimmt vereinfachend an, dass jeder Gast 4 €, 12 € oder gar kein Geld an seinem Kiosk ausgibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast 4 € ausgibt, betrage 50 %, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast 12 € ausgibt, betrage 30 %.

(1) Am betrachteten Tag besuchen 660 Personen das Bad.
Bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, mit denen der Besitzer des Kiosks rechnen kann.

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Besitzer des Kiosks an dem betrachteten Tag erwartete Einnahmen von den Jahreskartenbesitzern hat, die mindestens* 1000 € *betragen.*

(3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Schwimmbadleitung hat die Außenanlagen komplett umgestaltet. Nun hofft sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür erhöht hat, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an einem Tag, der mit dem in der Einleitung genannten vergleichbar ist, das Schwimmbad besucht. Daher zählt sie an einem solchen vergleichbaren Tag die Anzahl der Besucher mit Jahreskarte. Falls es 215 oder mehr sind, will die Schwimmbadleitung davon ausgehen, dass die Umbaumaßnahmen wirksam waren.

(1) X sei die in a) betrachtete Zufallsgröße.

Ermitteln Sie $P_{2000;0,10}(X \geq 215)$ *und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.*

(2) Die getroffenen Maßnahmen mögen Erfolg gehabt haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an dem betrachteten Tag das Schwimmbad besucht, betrage nun 12 %. Für diesen Tag beschreibt die neue Zufallsgröße Y die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Dabei sei $p_{neu} = 0,12$ und $n = 2000$. Vereinfachend soll wieder davon ausgegangen werden, dass Y binomialverteilt ist.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schwimmbadleitung in der vorliegenden Situation die Wirksamkeit der Umbaumaßnahmen falsch beurteilt.

(5 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2019

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2019

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an dem betrachteten Tag genau 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, beträgt etwa 2,2 %.

(2) $P_{2000;\,0,1}(X > 210) \approx 21{,}6\,\%$.

(3) $E(X) = 0{,}1 \cdot 2000 = 200$, $\sigma(X) = \sqrt{2000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{180} \approx 13{,}4$.
$P_{2000;\,0,1}(200 - 6 \le X \le 200 + 6) \approx 37{,}2\,\%$.

(4) $P_{2000;\,0,1}(X < 183) \approx 0{,}09$, $P_{2000;\,0,1}(X < 184) \approx 0{,}11$. Also ist $k = 183$.

(5) *Zufallsexperiment*: Zwei Jahreskartenbesitzer unter den 2000 werden zufällig ausgewählt, und es wird geschaut, ob sie an dem betrachteten Tag das Schwimmbad besuchen.
Ereignis: „Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad entweder von beiden oder von keinem von beiden besucht.“
[Auch Lösungen in neuen Kontexten sind zulässig.]
[Nicht erwartet: *p* ist nahezu konstant, da die Anzahl der Personen (2000) sehr groß ist im Vergleich zu den beiden ausgewählten.]

Teilaufgabe b)

(1) In *Abbildung 2* könnte die folgende Frage untersucht werden: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit besuchen 220 oder weniger Jahreskartenbesitzer an dem bestimmten Tag das Schwimmbad?“

(2) Die dargestellte Wahrscheinlichkeit beträgt $P_{2000;\,0,1}(X \le 220) \approx 0{,}9352$.

Teilaufgabe c)

(1) Der Besitzer des Kiosks kann mit Einnahmen in einer Höhe von

$0{,}5 \cdot 660 \cdot 4\,€ + 0{,}3 \cdot 660 \cdot 12\,€ = 3696\,€$ rechnen.

(2) Sei n die Anzahl der benötigten Jahreskartenbesitzer:

Aus $0{,}5 \cdot n \cdot 4 + 0{,}3 \cdot n \cdot 12 = 1000$ folgt $n = \frac{1000}{0{,}5 \cdot 4 + 0{,}3 \cdot 12} = \frac{1000}{5{,}6} \approx 178{,}6$.

Der TR liefert $P_{2000;\,0,1}(X \geq 179) \approx 0{,}947$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher ca. 95 %.

Teilaufgabe d)

(1) Der TR liefert $P_{2000;\,0,1}(X \geq 215) \approx 0{,}14$.

Falls der Anteil an Jahreskartenbesitzern, die an einem bestimmten Tag das Schwimmbad besuchen, nach wie vor 10 % beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 2000 Personen mindestens 215 an dem gewählten Tag ins Schwimmbad gehen, ca. 14 %. Die Schwimmbadleitung würde in einem solchen Fall die Umbaumaßnahmen als wirksam beurteilen, obwohl sich die Wahrscheinlichkeit nicht erhöht hat.

(2) Unter der im Aufgabentext genannten Voraussetzung, dass der Anteil an Jahreskartenbesitzern, die an einem bestimmten Tag das Schwimmbad besuchen, nun 12 % beträgt, beurteilt die Schwimmbadleitung die Wirksamkeit der Umbaumaßnahmen falsch, wenn von den 2000 Jahreskartenbesitzern höchstens 214 an dem gewählten Tag ins Schwimmbad gehen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $P_{2000;\,0,12}(Y \leq 214) \approx 0{,}038$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die Aussage im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) bestimmt den Erwartungswert und die Standardabweichung.	3			
4	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
5	(4) bestimmt die gesuchte natürliche Zahl *k*.	4			
6	(5) beschreibt ein Zufallsexperiment im Sachzusammenhang.	2			
7	(5) gibt ein Ereignis an.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**19**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt im Sachzusammenhang eine Fragestellung, die zu *Abbildung 2* passt.	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit auf vier Nachkommastellen genau.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Höhe der Einnahmen, mit denen der Kioskbesitzer rechnen kann.	3			
2	(2) ermittelt die benötigte Anzahl an Personen.	2			
3	(2) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt $P_{2000;\,0{,}10}(X \geq 215)$.	2			
2	(1) erläutert die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.	3			
3	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0