Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$.

Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und geben Sie die Bereiche an, in denen der Graph von f oberhalb der x-Achse verläuft.

(6 Punkte)

b) Gegeben sind die beiden in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit $f(x)=e^x+\frac{1}{2}x+1$ und $g(x)=\frac{1}{2}x$.

Die Graphen der beiden Funktionen sind in *Abbildung 1* dargestellt.

(1) *Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph von g keinen gemeinsamen Punkt besitzen.*

(2) *Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g, der y-Achse und der parallel zur y-Achse verlaufenden Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eingeschlossen wird.*

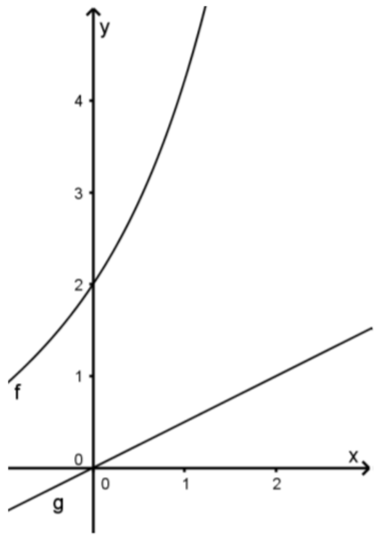


Abbildung 1

(2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

(1) *Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an und zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.*

(2) Die Ebene E enthält die Geraden g und h.
Prüfen Sie, ob der Punkt $P(7\,|\,-3\,|\,5)$ in E liegt. (2 + 4 Punkte)

d) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$.

(1) Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

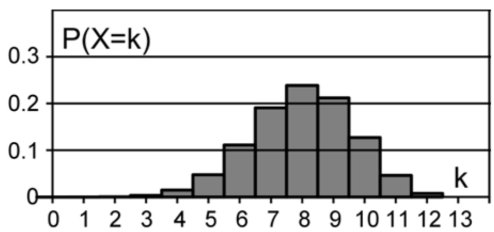


Abbildung 2

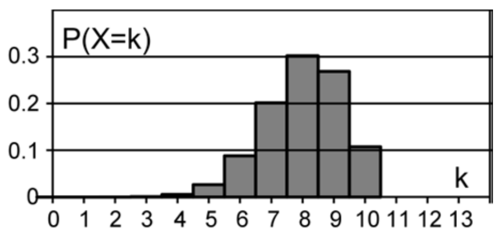


Abbildung 3

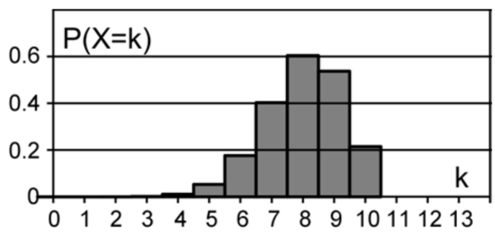


Abbildung 4

Begründen Sie, warum Abbildung 2 und Abbildung 4 nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellen.

(2) *Ermitteln Sie aus der zugehörigen Abbildung näherungsweise den Wert der Wahrscheinlichkeit $P(6 \le X \le 8)$.*

(4 + 2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$\frac{1}{3} \cdot x^3 - 3 \cdot x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^2 - 3 \right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{3} \cdot x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = -3 \ \vee x = 0 \ \vee \ x = 3$.

Es ergeben sich die Nullstellen: $x_1 = -3; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 3$.

Der Graph verläuft oberhalb der x-Achse für $-3 < x < 0$ und für $x > 3$.

Teilaufgabe b)

(1) $f(x) = g(x) \ \Leftrightarrow \ e^x + \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x \ \Leftrightarrow \ e^x = -1$.

Diese Gleichung besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$ und somit besitzen die beiden Graphen keinen gemeinsamen Punkt.

(2) Aus der *Abbildung 1* erkennt man, dass für $0 \le x \le 1$ gilt: $f(x) > g(x)$.

Somit folgt: $A = \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2}x + 1 - \left(\frac{1}{2}x \right) \right) \mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(e^x + 1 \right) \mathrm{d}x = \left[e^x + x \right]_0^1 = e + 1 - 1 = e$ [FE].

Teilaufgabe c)

(1) $(3\,|\,{-3}\,|\,3)$ ist der Schnittpunkt von g und h.

Aus $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ folgt die Orthogonalität von g und h.

(2) $E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{R}$, ist eine Parametergleichung der Ebene.

Die Gleichung $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird von $u = 1$ und $v = 1$ gelöst.

Also liegt P in E.

Teilaufgabe d)

(1) *Abbildung 2* stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht dar, da laut Vorgabe $n = 10$ gilt und in der Abbildung $P(X > 10) > 0$.

Abbildung 4 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht dar, da die Summe der dort dargestellten Einzelwahrscheinlichkeiten größer als 1 ist.

(2) Es ist $P(6 \le X \le 8) \approx 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt alle Nullstellen von *f*.	3			
2	gibt die Bereiche an, in denen der Graph oberhalb der *x*-Achse verläuft.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die beiden Graphen keinen gemeinsamen Punkt besitzen.	2			
2	(2) bestimmt den Inhalt der Fläche.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt die Koordinaten des Schnittpunkts von *g* und *h* an.	1			
2	(1) zeigt, dass *g* und *h* senkrecht zueinander verlaufen.	1			
3	(2) prüft, ob *P* in *E* liegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt begründet an, warum Abbildung 2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht angibt.	2			
2	(1) gibt begründet an, warum Abbildung 4 die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht angibt.	2			
3	(2) ermittelt näherungsweise den gesuchten Wert.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem Entwicklungslabor wird der Ladevorgang bei Akkus an verschiedenen Ladegeräten getestet. Der zeitliche Verlauf der Ladung bei Verwendung eines bestimmten Ladegerätes wird durch die Funktion Q mit $Q(t) = 1000\left(1 - e^{-0,4 \cdot t}\right)$ modelliert und ist in *Abbildung 1* dargestellt.

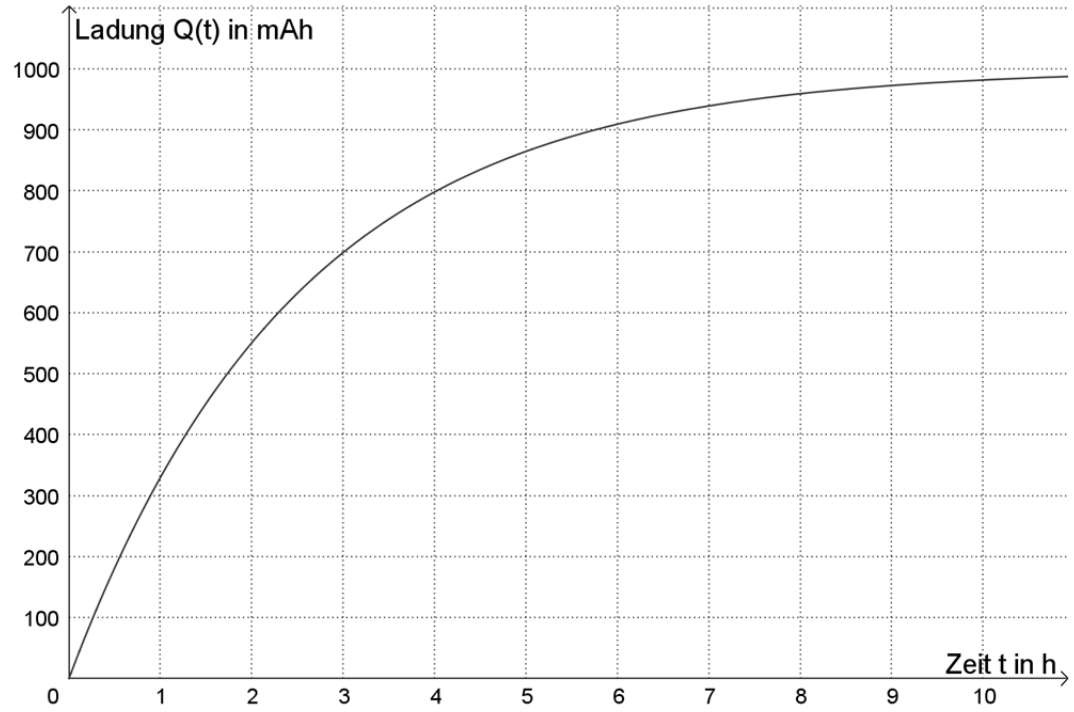


Abbildung 1

Dabei gibt t die seit Beginn des Ladevorgangs vergangene Zeit in Stunden und $Q(t)$ die Ladung des Akkus zum Zeitpunkt t (Einheit: mAh) an. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und es gilt $Q(0) = 0$, d. h., in der Modellierung wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ladung des Akkus zu Beginn immer den Wert 0 hat.

Name: ____________________

a) (1) Der Verlauf des Graphen legt die Vermutung nahe, dass sich die Funktion Q für große Werte von t dem Wert 1000 annähert und ihn nicht überschreitet.
Entscheiden Sie begründet, ob diese Vermutung wahr ist.

Die maximale Ladung, die ein Akku unter idealen Bedingungen aufnehmen kann, wird Kapazität genannt. In diesem Falle hat der Akku eine Kapazität von 1000 mAh. Eine Balkenanzeige am Ladegerät signalisiert während des Ladevorgangs den momentanen Ladezustand des Akkus mit folgenden Symbolen:

kein Balken:	Die Ladung beträgt weniger als 30 % der Kapazität.
ein Balken:	Die Ladung beträgt mindestens 30 % und unter 60 % der Kapazität.
zwei Balken:	Die Ladung beträgt mindestens 60 % und unter 90 % der Kapazität.
drei Balken:	Die Ladung beträgt mindestens 90 % der Kapazität.

(2) *Bestimmen Sie, wie viele Minuten es ab dem Start des Ladevorgangs dauert, bis die Balkenanzeige den ersten Balken anzeigt. Begründen Sie anschaulich, ggf. mit Abbildung 1, dass die Zeitdauer bis zum Erscheinen eines weiteren Balkens von Balken zu Balken immer größer wird.*

(3 + 5 Punkte)

Die momentane Änderungsrate der Ladung Q wird Ladestrom I genannt (Einheit: mA). Der Ladestrom wird zur Kontrolle des Ladungsvorgangs benutzt. In diesem Falle lautet also die Funktionsgleichung für den Ladestrom: $I(t) = Q'(t) = 400e^{-0,4\cdot t}$.

b) (1) *Begründen Sie, dass der Ladestrom I zum Startzeitpunkt des Ladevorgangs am größten ist.*

(2) Um den Akku zu schonen, soll der Ladestrom während des Ladevorgangs den Wert 500 nicht überschreiten.
Entscheiden Sie begründet, ob diese Bedingung beim vorliegenden Ladevorgang eingehalten wird.

(3) Der Ladevorgang wird abgeschaltet, wenn der Ladestrom I den Wert 10 erreicht.
Bestimmen Sie die Dauer des Ladevorgangs in Stunden und Minuten, wenn der Ladevorgang nach dieser Bedingung abgeschaltet wird. Bestimmen Sie die Anzahl der Balken, die die Balkenanzeige dann anzeigt.

(3 + 3 + 6 Punkte)

Name: ____________________

Im Folgenden wird der Ladevorgang für einen Akku der Kapazität 1000 mAh an verschiedenen Ladegeräten verglichen. Der zeitliche Verlauf des Ladevorgangs für verschiedene Ladegeräte wird durch Funktionen Q_k mit $Q_k(t) = 1000\left(1 - e^{-k\cdot t}\right)$, $k \in \mathbb{R}, k > 0$, modelliert und ist für $k = 0{,}2$; $k = 0{,}4$; $k = 0{,}6$ und $k = 0{,}95$ in *Abbildung 2* dargestellt.

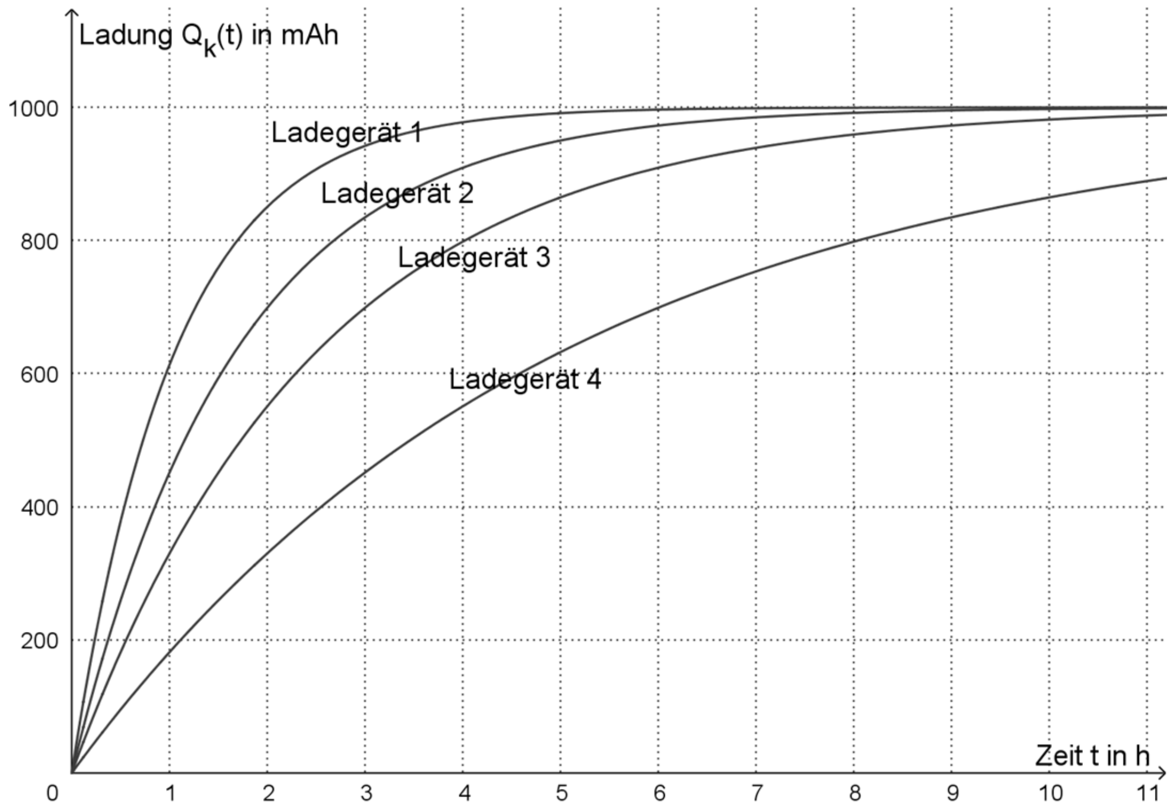


Abbildung 2

c) (1) *Beschreiben Sie die Bedeutung größer werdender Werte für den Parameter k im Sachzusammenhang.*

(2) *Geben Sie an, welcher Graph in Abbildung 2 zu welchem Parameter gehört.*

(2 + 2 Punkte)

Name: ______________________

Ein Akku der Kapazität 1000 mAh wird durch ein defektes Ladegerät fälschlicherweise mit einem Ladestrom geladen, der durch die Funktionsvorschrift $I_d(t) = (100t + 50)e^{-0,4 \cdot t + 0,1}$ modelliert wird. Nach 12 Stunden wird der Ladevorgang an diesem Ladegerät abgebrochen.

d) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion I_d genau ein lokales Maximum besitzt.*

[Kontrolllösung: $I_d{}'(t) = (-40t + 80)e^{-0,4 \cdot t + 0,1}$]

(2) *Begründen Sie, dass während des Ladevorgangs der Ladestrom I_d den Wert 150 nie überschreitet.*

Die Funktion Q_d beschreibt die Ladung des Akkus beim Ladevorgang an dem defekten Ladegerät.

(3) *Begründen Sie, dass die Funktion Q_d für $t > 0$ monoton steigt.*

(4) *Bestimmen Sie die Ladung des Akkus an diesem Ladegerät, wenn der Ladevorgang nach 12 Stunden abgebrochen wird.*

(7 + 3 + 2 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     – einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $e^{-0{,}4t} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}4t} < 1 \Leftrightarrow 1000(1 - e^{-0{,}4t}) < 1000$;

für große t gilt: $e^{-0{,}4t} \to 0$ somit $1000(1 - e^{-0{,}4t}) \to 1000$.

Die Vermutung ist also wahr.

(2) Der erste Balken erscheint, wenn $Q(t_1) = 300 \Leftrightarrow t_1 \approx 0{,}892$.

Die Zeitdauer beträgt je nach Rundung ca. 53 – 54 min.
Der Abbildung kann man entnehmen, dass mit wachsendem t die Steigung der Funktion immer kleiner wird. Somit wird der Zeitraum für den immer gleichen Zuwachs von 300 immer größer. Es dauert immer länger, bis der jeweils nächste Balken erscheint.

Teilaufgabe b)

(1) I ist eine fallende Exponentialfunktion. Das Maximum wird also immer am linken Rand angenommen, also bei $t = 0$.

(2) Da das Maximum bei $t = 0$ angenommen wird, ist $I(0) = 400e^{-0{,}4\cdot 0} = 400$ das Maximum der Stromstärke. Der Ladestrom überschreitet also nie den Wert 500 mA.

(3) $I(t_2) = 400e^{-0{,}4t_2} = 10 \Leftrightarrow t_2 \approx 9{,}22$.

Der Ladevorgang wird also nach ca. 9 h und 13 min beendet.
Es gilt $Q_1(t_2) \approx 975$ [mAh].

Es werden also am Ende des Ladevorgangs drei Balken angezeigt.

Teilaufgabe c)

(1) Der Parameter k beeinflusst die Geschwindigkeit des Ladevorgangs: je größer k, desto schneller wird der Akku geladen.

(2) Wegen (1) ergibt sich, dass das Ladegerät 1 zum Parameter 0,95 gehören muss, Ladegerät 2 zu $k = 0{,}6$, Ladegerät 3 zu $k = 0{,}4$ und Ladegerät 4 zu $k = 0{,}2$.

Teilaufgabe d)

(1) $I_d'(t) = 100 \cdot e^{-0,4t+0,1} - 0,4 \cdot (100t + 50) \cdot e^{-0,4t+0,1} = (-40t + 80) \cdot e^{-0,4t+0,1}$.

Die Ableitung $I_d'(t) = (-40t + 80) \cdot e^{-0,4t+0,1}$ hat genau eine Nullstelle:

$I_d'(t_3) = 0 \Leftrightarrow t_3 = 2$.

Dort liegt wegen des linearen Faktors vor der Exponentialfunktion ein Vorzeichenwechsel bei I_d' von + nach – vor.

Also hat die Funktion genau ein lokales Maximum.

(2) Da keine weiteren lokalen Extrema vorhanden sind, ist das lokale Maximum $I_d(2) \approx 124$ auch das globale Maximum.

Der Wert 150 des Ladestroms wird also nie überschritten.

(3) I_d ist die Ableitung von Q_d.

Da $I_d(t) > 0$ für alle $t > 0$, ist die Funktion Q_d monoton steigend.

(4) Die Ladung ergibt sich als $\int_0^{12} I_d(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{12} (100t + 50) \cdot e^{-0,4t+0,1}\,\mathrm{d}t \approx 795$.

Die Ladung beträgt nach 12 Stunden also 795 [mAh].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, dass die Vermutung wahr ist, und begründet, dass sich der Funktionswert dem Wert 1000 annähert und den Wert 1000 nicht überschreitet.	3			
2	(2) bestimmt die Zeitdauer in Minuten.	3			
3	(2) begründet anschaulich, dass die Zeitdauer immer größer wird.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass das Maximum bei $t = 0$ angenommen wird.	3			
2	(2) entscheidet begründet, dass die Bedingung eingehalten wird.	3			
3	(3) bestimmt die Dauer des Ladevorgangs in Stunden und Minuten.	3			
4	(3) bestimmt die Anzahl der Balken am Ende des Ladevorgangs.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt die Bedeutung größer werdender Werte für den Parameter k im Sachzusammenhang.	2			
2	(2) gibt an, welches Ladegerät zu welchem Parameter gehört.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt einen Term der Ableitung.	3			
2	(1) zeigt rechnerisch, dass die Funktion genau ein lokales Maximum besitzt.	4			
3	(2) begründet, dass der Ladestrom den Wert 150 nie überschreitet.	3			
4	(3) begründet, dass Q_d für $t > 0$ monoton steigt.	2			
5	(4) bestimmt die Ladung des Akkus.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) (1) *Begründen Sie, dass der Graph von f maximal drei Extremstellen besitzt.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art der Extrempunkte.*
[Zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.]

(3) *Ermitteln Sie das absolute Maximum des Graphen von f.*

(2 + 8 + 3 Punkte)

Die Funktion f besitzt genau zwei Nullstellen.

b) *Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an.*
[Zur Kontrolle: Für die eine Nullstelle gilt $x < 0$ und für die andere gilt $x > 240$.]

(4 Punkte)

c) Der Graph der Funktion f soll um p Einheiten ($p \in \mathbb{R}$) nach unten verschoben werden.

Geben Sie alle Werte von p an, für die der verschobene Graph genau drei Nullstellen besitzt.

(4 Punkte)

Name: ____________________

d) Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der zur y-Achse parallelen Geraden mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.

(1) *Stellen Sie das Flächenstück in der nachfolgenden Abbildung graphisch dar.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes.*

(3) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert.*

(2 + 3 + 4 Punkte)

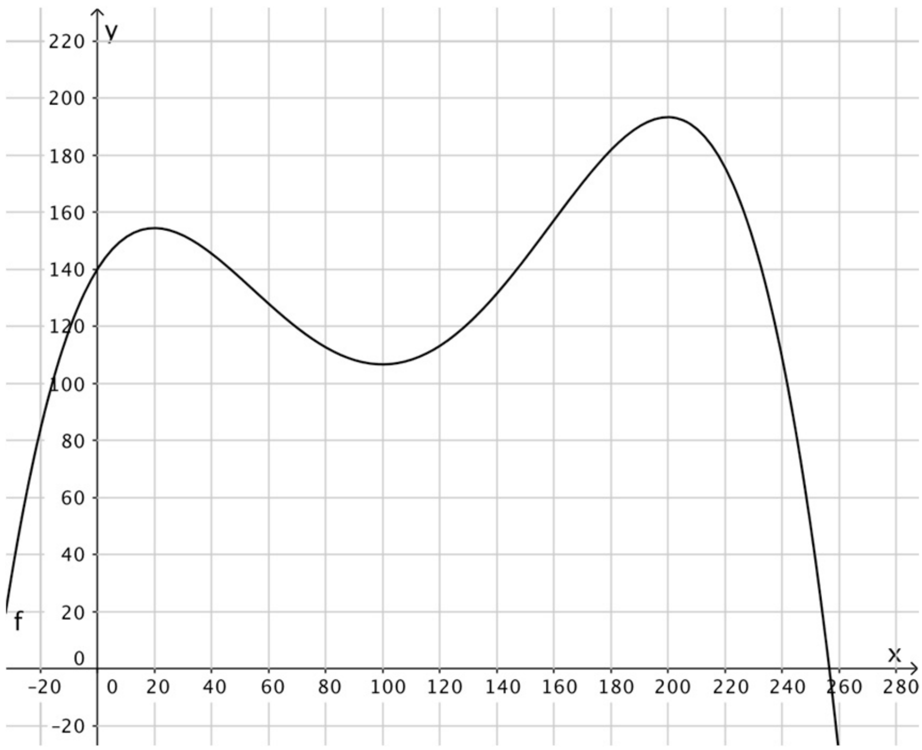


Abbildung: Graph von f

Name: ______________________

Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mit Hilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. die Konzentration der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion *f* beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist *x* die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und *f(x)* der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$.

e) *Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum* $(0 \leq x \leq 240)$ *denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt.*

(6 Punkte)

f) Es gibt Zeitpunkte, an denen sich der Glukosewert um $-0{,}5\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute verändert.

Bestimmen Sie alle Zeitpunkte im betrachteten Zeitraum, an denen eine solche Veränderung auftritt.

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     – einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad vier. Somit kann die zugehörige Ableitungsfunktion maximal drei Nullstellen besitzen. Nach der notwendigen Bedingung für Extremstellen besitzt f somit maximal drei solche Stellen.

(2) $f'(x) = -\frac{1}{250000} \cdot x^3 + \frac{4}{3125} \cdot x^2 - \frac{13}{125} \cdot x + \frac{8}{5}$.

$f''(x) = -\frac{3}{250000} x^2 + \frac{8}{3125} x - \frac{13}{125}$.

Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$:

$f'(x_E) = 0 \iff x_E = 20 \vee x_E = 100 \vee x_E = 200$.

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) \neq 0$ (oder VZW-Kriterium).

$f''(20) = -\frac{36}{625} < 0, \quad f''(100) = \frac{4}{125} > 0, \quad f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$.

Hochpunkte:

$H_1\left(20 \,|\, \frac{11584}{75}\right)$ bzw. $H_1(20 \,|\, 154{,}5)$, $\quad H_2\left(200 \,|\, \frac{580}{3}\right)$ bzw. $H_2(200 \,|\, 193{,}3)$

Tiefpunkt:

$T\left(100 \,|\, \frac{320}{3}\right)$ bzw. $T(100 \,|\, 106{,}7)$

(3) Der Verlauf des Graphen von *f* wird für sehr kleine und sehr große Werte von *x* durch den Summanden $-\frac{1}{10^6}\cdot x^4$ bestimmt.

Die Funktionswerte von *f* streben daher für betragsgroße Werte von *x* gegen minus unendlich [d. h. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$]. Damit liegt das absolute Maximum der Funktion *f* nach a) (2) bei *x* = 200 und beträgt etwa 193,3.

Teilaufgabe b)

Der Taschenrechner liefert als Nullstellen von *f*: $x \approx -35{,}1$ und $x \approx 256{,}6$.

Der Schnittpunkt mit der *y*-Achse lautet $S(0\,|\,140)$.

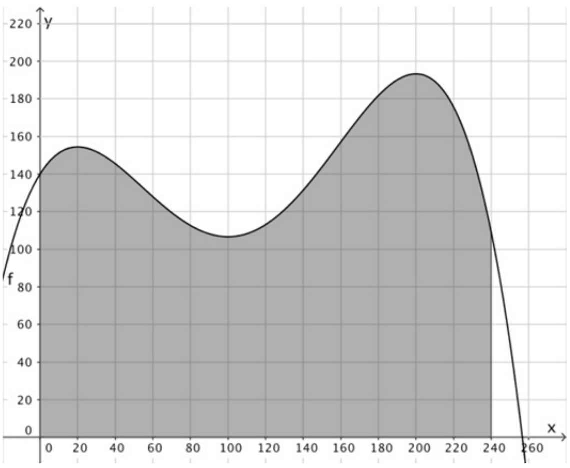
Teilaufgabe c)

Möglichkeit 1: Der Graph wird um $p_1 = \frac{320}{3} \approx 106{,}7$ Einheiten nach unten verschoben.

Möglichkeit 2: Der Graph wird um $p_2 = \frac{11584}{75} \approx 154{,}5$ Einheiten nach unten verschoben.

Teilaufgabe d)

(1)



(2) Für den gesuchten Flächeninhalt gilt: $\int_0^{240} f(x)dx = 34705{,}92\,[\text{FE}]$.

(3) Für $\int_0^k f(x)dx = \frac{34705{,}92}{2}$ liefert der Taschenrechner im Intervall $[0\,;\,240]$ die Lösung $k \approx 135{,}5$.

D. h., die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben.

Teilaufgabe e)

Gesucht ist der *x*-Wert im Intervall [0; 240], für den $f\,'$ maximal wird.

Mögliche Zeitpunkte liegen an den lokalen Maximalstellen von $f\,'$ und an den Rändern des betrachteten Zeitraums vor. Unter Verwendung des Taschenrechners ergibt sich das lokale Maximum von $f\,'$ im Intervall bei $x \approx 158{,}7$ mit $f'(158{,}7) \approx 1{,}3$.

Randüberprüfung: $f'(0) = \frac{8}{5} = 1{,}6$; $\quad f'(240) = -\frac{616}{125}$.

Der Glukosewert steigt zu Beobachtungsbeginn ($x = 0$) am stärksten an.

Teilaufgabe f)

Der Taschenrechner liefert mit dem Ansatz $f'(x) = -0{,}5$ drei Zeitpunkte, an denen sich der Glukosewert um $-0{,}5\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute verändert: $x_1 \approx 30{,}6$, $x_2 \approx 83{,}0$ und $x_3 \approx 206{,}3$ [jeweils Minuten nach Beobachtungsbeginn].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass der Graph von f maximal drei Extremstellen besitzt.	2			
2	(2) berechnet die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmt die Art der Extrempunkte.	8			
3	(3) ermittelt das absolute Maximum des Graphen von f.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Nullstellen von f.	3			
2	gibt die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse an.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
	gibt alle Werte von p an, für die der verschobene Graph genau drei Nullstellen besitzt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt das Flächenstück graphisch dar.	2			
2	(2) bestimmt den Flächeninhalt des Flächenstückes.	3			
3	(3) bestimmt eine Gleichung der Geraden, die das Flächenstück halbiert.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt das lokale Maximum des Graphen von f'.	3			
2	untersucht die Ränder des betrachteten Zeitraums und bestimmt denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**6**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
	bestimmt alle Zeitpunkte, an denen eine solche Veränderung auftritt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**4**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden.

Die obere Etage entspricht dabei der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die ebene horizontale Oberfläche des Untergrunds. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

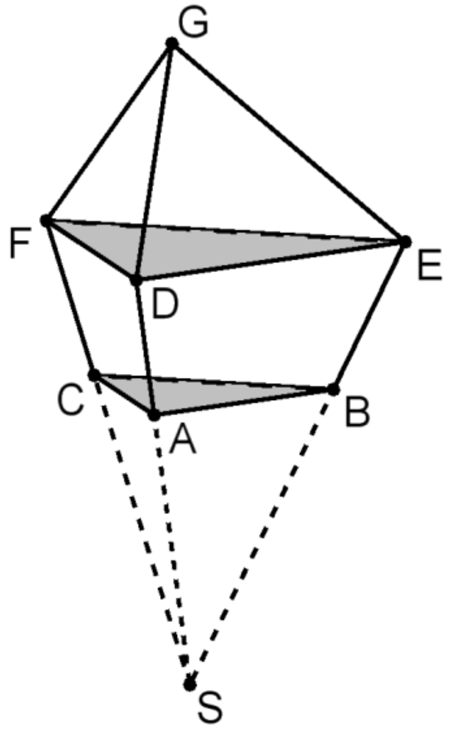


Abbildung 1

Name: ____________________

a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=s=3,$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}, \text{ d. h. } S(-15\,|\,15\,|\,-30).$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

(5 Punkte)

b) (1) *Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche DEF der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.*

(2) *Bestimmen Sie für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels ε bei E.*
[Zur Kontrolle: $\varepsilon = 45°$]

(3) Im Dreieck *DEF* ist der Punkt *P* der Fußpunkt der Höhe *h* auf die Seite $\overline{EF}$ (vgl. *Abbildung 2*).

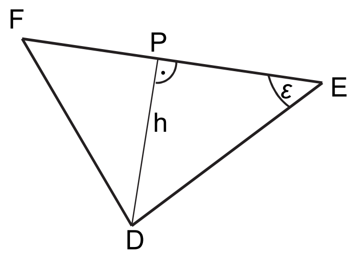


Abbildung 2 [nicht maßstabsgetreu]

Begründen Sie, dass das Dreieck DEP gleichschenklig ist, und bestimmen Sie die Länge der Höhe h.
[Zur Kontrolle: $h = 15\sqrt{2}$]

(4) *Begründen Sie, dass der Abstand des Punktes G zur Ebene durch DEF direkt aus den x_3-Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden kann, und geben Sie diesen Abstand an.*

Name: ____________________

(5) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m³ Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 *Kilowatt ausreichend ist.*

(4 + 3 + 5 + 3 + 5 Punkte)

Die obere Etage wird durch einen Laser alarmgesichert.
Der Laser ist im Punkt Q mit $Q(-9|\ 8|\ 15{,}5)$ an einer Metallstange befestigt. Diese Metallstange verläuft geradlinig von der Spitze G der Pyramide über den Punkt Q zur Bodenfläche der oberen Etage.

c) (1) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Bodenpunktes R der Metallstange in der Bodenfläche und die Länge der Metallstange.*
[Hinweis: Ein Nachweis, dass der Punkt R innerhalb des Dreiecks DEF liegt, wird nicht erwartet.]

(2) Der Laser im Punkt Q ist so eingestellt, dass der Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}34 \\ 0{,}84 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$ ausgerichtet ist.
Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl mit dieser Einstellung auf die Kante $\overline{GE}$ trifft.

(7 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

S wird bestimmt als Schnittpunkt der Geraden *AD* mit der Geraden *BE*.

Eine Gleichung der Geraden *AD* lautet: $AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$,

eine Gleichung der Geraden *BE* lautet: $BE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

Diese Geradengleichungen werden in der ersten Zeile der Lösung, die in der Aufgabe angegeben ist, gleichgesetzt. Durch dieses Verfahren erhält man die Lösung $r = s = 3$.
In der zweiten Zeile der angegebenen Lösung wird in die Geradengleichung der Geraden *AD* der Wert für *r* eingesetzt. Dadurch erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes *S*.

Teilaufgabe b)

(1) Das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird gebildet. Da $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} \neq 0$; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ und $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ ist, liegt kein rechter Winkel im Dreieck *DEF* vor.

(2) Der Innenwinkel ε bei *E* wird gebildet durch die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{ED}$.

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{750}{30 \cdot \sqrt{1250}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \Rightarrow \varepsilon = 45°.$$

(3) Der Punkt *P* auf der Seite $\overline{EF}$ ist der Fußpunkt der Höhe *h* auf diese Seite. Damit liegt bei *P* im Dreieck *DEP* ein rechter Winkel vor. Da der Winkel ε den Wert 45° hat, ist nach dem Winkelsummensatz im Dreieck *DEP* der Winkel bei *D* ebenfalls 45° groß. Daraus folgt, dass das Dreieck gleichschenklig ist. Die Höhe *h* des Dreiecks ergibt sich z. B. durch eine Winkelbeziehung im rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(45°) = \frac{h}{|\overrightarrow{ED}|}; \; h = |\overrightarrow{ED}| \cdot \sin(45°) = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15 \cdot \sqrt{2} \approx 21{,}21 \,[\text{m}].$$

(4) Da die Ebene durch *DEF* parallel zur x_1x_2-Ebene liegt, kann der Abstand des Punktes *G* zur Ebene direkt aus den x_3-Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden: Abstand = 35 [m] – 15 [m] = 20 [m].

(5) Die obere Etage ist eine Pyramide mit dem Dreieck *DEF* als Grundfläche. Die Körperhöhe $h_{Pyramide}$ entspricht dem Abstand aus (4): $h_{Pyramide} = 20$ [m].

Die Grundfläche der Pyramide ist die Fläche des Dreiecks *DEF:*

$$G = \frac{1}{2} \cdot h \cdot |\overrightarrow{EF}| = 0{,}5 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{1250} = 375 \,[\text{m}^2].$$

Damit ergibt sich für das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500 \,[\text{m}^3] = 25 \cdot 100 \,[\text{m}^3].$$

Die Anlage mit einer Leistung von 25 kW reicht aus, da 25 · 0,8 kW = 20 kW.

Teilaufgabe c)

(1) Die Metallstange wird durch die Gerade *GQ* modelliert.

Der Punkt *R* liegt auf der Geraden *GQ* und in der Ebene des Dreiecks *DEF*.

Damit hat der Punkt *R* die x_3-Koordinate $x_3 = 15$ wie alle Punkte der Ebene, in der das Dreieck *DEF* liegt.

Eine Parametergleichung der Geraden *GQ* ist:

$$g_{GQ}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -19{,}5 \end{pmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}.$$

Die Bedingung $x_3 = 15$ ergibt: $u = \frac{40}{39}$.

Damit hat *R* die auf zwei Nachkommastellen gerundeten Koordinaten *R*(–8,97| 7,95| 15).

Die Länge der Metallstange in der oberen Etage wird durch die Länge der Strecke $\overline{GR}$ modelliert: $\left| \frac{40}{39} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -19{,}5 \end{pmatrix} \right| \approx 20{,}13\ \text{[m]}$.

(2) Durch den Vektor $\vec{v}$ und den Punkt Q ist die Gerade l festgelegt, die den Lichtstrahl modelliert.

Eine Parametergleichung der Geraden l ist:

$$l:\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\8\\15{,}5\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}0{,}34\\0{,}84\\0{,}02\end{pmatrix};\quad m\in\mathbb{R}.$$

Eine Parametergleichung der Strecke $\overline{GE}$ ist:

$$\overline{GE}:\vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\35\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\-20\end{pmatrix};\quad n\in\mathbb{R}\text{ mit } 0\le n\le 1.$$

Wenn sich die Gerade l und die Gerade GE in einem Punkt schneiden und es gilt $0\le n\le 1$, so liegt der Schnittpunkt auf der Kante $\overline{GE}$.

Das Gleichsetzen der Gleichungen für l und $\overline{GE}$ liefert ein überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I:&\quad -9+0{,}34m=-10+10n\\ II:&\quad 8+0{,}84m=10+20n.\\ III:&\quad 15{,}5+0{,}02m=35-20n\end{aligned}$$

Die Gleichungen I und II liefern die Lösungen $m = 25$ und $n = 0{,}95$.

Die Gleichung III ergibt mit diesen Werten eine wahre Aussage. Somit schneiden sich die Geraden in einem Punkt.

Da für n die Bedingung $0\le n\le 1$ erfüllt ist, liegt der Schnittpunkt auf der Kante $\overline{GE}$. Somit trifft der Lichtstrahl die Kante.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	erläutert die erste Zeile des dargestellten Verfahrens.	3			
2	erläutert die zweite Zeile des dargestellten Verfahrens.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass die Bodenfläche nicht rechtwinklig ist.	4			
2	(2) bestimmt im Dreieck *DEF* die Größe des Innenwinkels bei *E*.	3			
3	(3) begründet, dass das Dreieck *DEP* gleichschenklig ist.	2			
4	(3) bestimmt die Länge der Höhe *h*.	3			
5	(4) begründet, dass der Abstand direkt aus den Koordinaten ermittelt werden kann, und gibt den Abstand an.	3			
6	(5) weist nach, dass eine Leistung von 25 kW ausreichend ist.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt die Koordinaten des Bodenpunktes R.	5			
2	(1) ermittelt die Länge der Metallstange.	2			
3	(2) zeigt, dass der im Modell festgelegte Lichtstrahl auf die Kante $\overline{GE}$ trifft.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

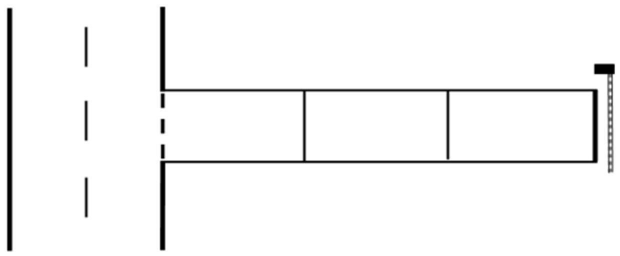
Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Einfahrt zu einem Parkhaus bietet vor der Schranke Platz für maximal drei wartende Autos. Sind diese drei Plätze besetzt, so kann ein ankommendes Auto nicht von der Straße in die Einfahrt zum Parkhaus einbiegen, sondern muss weiterfahren (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Die Entwicklung der Warteschlange vor der Schranke kann durch einen stochastischen Prozess beschrieben werden. Dieser stochastische Prozess besitzt die vier Zustände:
Z_0: kein Auto steht in der Einfahrt bis *Z_3: drei Autos stehen in der Einfahrt.*

Es wird angenommen, dass maximal ein Auto pro Minute in die Einfahrt zum Parkhaus einbiegt und auch maximal ein Auto pro Minute die Schranke passieren und in das Parkhaus fahren kann („Schranke öffnet").
Wenn in der Einfahrt mindestens ein Platz frei ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Einbiegen eines Autos in die Einfahrt in jeder Minute stets $p_1 = 0{,}3$. Vereinfachend wird angenommen, dass sich unabhängig von der bisherigen Wartezeit die Schranke in jeder Minute mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0{,}6$ öffnet, sodass ein Auto ins Parkhaus fahren kann. Ein Auto, das in die Einfahrt biegt, kann nicht in derselben Minute weiter ins Parkhaus fahren.

Name: ____________________

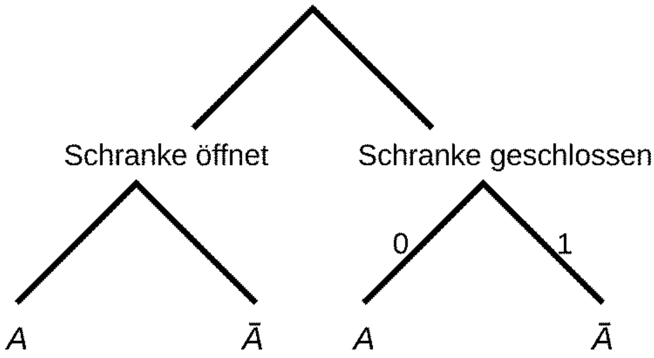
a) Angenommen der Prozess befindet sich im Zustand Z_3. Der Prozess verbleibt in diesem Zustand,

… wenn ein Auto ins Parkhaus fährt („Schranke öffnet“) und gleichzeitig ein neues Auto ankommt,

… wenn kein Auto aus der Warteschlange ins Parkhaus fahren kann („Schranke geschlossen“).

Der Prozess befindet sich im Zustand Z_3.

(1) *Geben Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm an.*



A: ein Auto biegt in die Einfahrt ein

$\overline{A}$: kein Auto biegt in die Einfahrt ein

(2) *Leiten Sie her: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess in der nächsten Minute im Zustand Z_3 bleibt, beträgt $p = 0,58$.*

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Wahrscheinlichkeit für die Veränderung des Prozesses von einer Minute zur nächsten wird vollständig beschrieben durch die Übergangsmatrix *U*.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{von } Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} & \text{nach} \\ U = & \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}42 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}46 & 0{,}42 & 0 \\ 0 & 0{,}12 & 0{,}46 & 0{,}42 \\ 0 & 0 & 0{,}12 & 0{,}58 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \end{array}$$

(1) *Stellen Sie die durch U beschriebenen Veränderungen mit Hilfe eines Übergangsdiagramms dar.*

(2) *Begründen Sie im Sachkontext, warum die Matrixelemente $u_{13} = u_{14} = u_{24} = u_{31} = u_{41} = u_{42}$ den Wert Null haben.*

(4 + 3 Punkte)

c) (1) Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht **kein Auto** in der Einfahrt.

Bestimmen Sie den Term $U^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.*

Zu einem anderen Zeitpunkt steht **genau ein Auto** in der Einfahrt.

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 10 Minuten drei Autos in der Einfahrt stehen.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 15 Minuten höchstens ein Auto in der Einfahrt steht.*

(4) *Untersuchen Sie, ausgehend von der Startverteilung* $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und entscheiden Sie begründet, ob der Bereich für wartende Autos vergrößert werden soll.

(4 + 4 + 4 + 5 Punkte)

Name: ____________________

d) Die zur Abrechnung der Parkgebühren verwendeten Parkchips werden von einem Produzenten als Massenware hergestellt. Sie werden in Kartons mit jeweils 300 Stück geliefert. Erfahrungsgemäß kann aufgrund von Fehlproduktionen ein Teil der angelieferten Chips nicht verwendet werden. Nach Angaben des Produzenten sind 5 % der Chips fehlerhaft. Dieser Wert wird als Wahrscheinlichkeit angenommen, dass ein zufällig ausgewählter Chip fehlerhaft ist. Die Anzahl der fehlerhaften Chips pro Karton wird im Folgenden als binomialverteilt angenommen.

Die Kartons werden vom Parkhausinhaber geprüft. Er muss pro Karton den vollen Preis bezahlen, wenn er weniger als 17 fehlerhafte Parkchips entdeckt. Bei 17 bis 24 fehlerhaften Parkchips müssen 60 % des vollen Preises bezahlt werden, bei mehr als 24 fehlerhaften Parkchips erhält er den Karton kostenlos.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle drei Fälle.*

(2) Es sollen im Mittel Einnahmen von 30 € pro Karton erwartet werden können.

Bestimmen Sie den vollen Verkaufspreis eines Kartons, den der Produzent festlegen muss, um dies zu erreichen.

(6 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

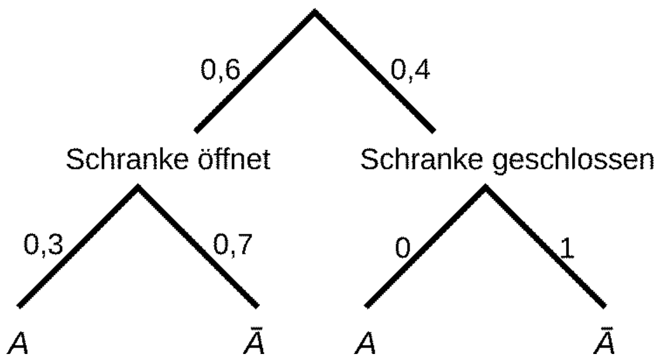
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

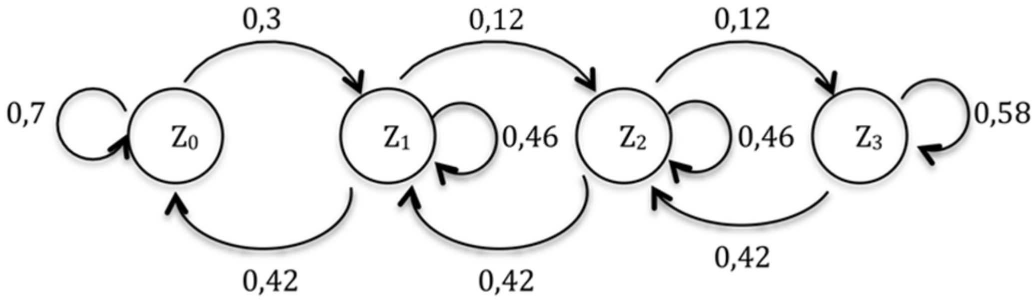
(1)



(2) P(Beibehaltung von Z_3) = 0,6·0,3 + 0,4 = 0,58.

Teilaufgabe b)

(1)



(2) Es sind jeweils nur Übergänge in benachbarte Zustände möglich, da die Warteschlange sich pro Minute nur um ein Auto verkürzen oder verlängern kann.
Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit für alle anderen Übergänge Null.

Teilaufgabe c)

(1) $U^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5413 \\ 0{,}3639 \\ 0{,}0806 \\ 0{,}0141 \end{pmatrix}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach fünf Minuten kein Auto in der Einfahrt befindet, beträgt zirka 54 %, die Wahrscheinlichkeit, dass sich dann genau ein Auto in der Einfahrt befindet, beträgt zirka 36 %, die Wahrscheinlichkeit für genau zwei Autos in der Warteschlange zu diesem Zeitpunkt beträgt zirka 8,1 % und die entsprechende Wahrscheinlichkeit für drei wartende Autos beträgt zirka 1,4 %.

(2) Da genau ein Auto in der Einfahrt steht, befindet sich der Prozess im Zustand Z_1.

Folglich lautet die Startverteilung: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{x_{10}} = U^{10} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5071 \\ 0{,}3615 \\ 0{,}1025 \\ 0{,}0289 \end{pmatrix}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 10 Minuten drei Autos in der Parkhauseinfahrt warten, beträgt zirka 0,029.

(3) $\overrightarrow{x_{15}} = U^{15} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5062 \\ 0{,}3614 \\ 0{,}1031 \\ 0{,}0294 \end{pmatrix}$.

Falls höchstens ein Auto in der Einfahrt wartet, befindet sich der Prozess im Zustand Z_0 oder Z_1. Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 15 Minuten höchstens ein Auto in der Einfahrt wartet, beträgt
0,5062 + 0,3614 = 0,8676.

(4) Zum Beispiel:

$$U^{60} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5059 \\ 0{,}3614 \\ 0{,}1032 \\ 0{,}0295 \end{pmatrix} \approx U^{61} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5059 \\ 0{,}3614 \\ 0{,}1032 \\ 0{,}0295 \end{pmatrix}.$$

Auf lange Sicht ergibt sich eine Verteilung folgender Form: Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Autos in der Warteschlange stehen, beträgt nur zirka 3 %, während mit einer Wahrscheinlichkeit von zirka 51 % sogar kein Auto vor der Schranke steht. Es besteht demnach keine Notwendigkeit, den Bereich für wartende Autos zu vergrößern.

[Sinnvoll begründete abweichende Urteile sollten akzeptiert werden.]

Teilaufgabe d)

(1) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der fehlerhaften Parkchips* ist binomialverteilt mit $n = 300$ und $p = 0{,}05$.

Mit Hilfe des Taschenrechners ergibt sich

$P(X < 17) = P(X \leq 16) \approx 0{,}66664$,

$P(17 \leq X \leq 24) \approx 0{,}32401$,

$P(X > 24) = P(X \geq 25) \approx 0{,}00935$.

(2) Der volle Preis sei z. Zufallsgröße V: Verkaufspreis pro Karton in €.

Die Zufallsgröße V kann die drei Werte z, $0{,}6 \cdot z$ und 0 annehmen.

Für den Erwartungswert $E(V)$ der Einnahmen pro Karton für den Produzenten gilt:

$E(V) \approx 0{,}6666 \cdot z + 0{,}3240 \cdot 0{,}6 \cdot z + 0{,}0094 \cdot 0 = 30$ €.

Es folgt: $0{,}861\, z = 30$ € , also $z \approx 34{,}84$ €.

Der volle Verkaufspreis sollte 34,84 € pro Karton betragen, um im Mittel 30 € pro Karton einzunehmen.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm an.	3			
2	(2) leitet den Wert der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}58$ her.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt ein zugehöriges Übergangsdiagramm dar.	4			
2	(2) begründet im Sachkontext den Wert Null der jeweiligen Matrixelemente.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt den gesuchten Wert des Terms.	2			
2	(1) interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
4	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
5	(4) untersucht die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung.	3			
6	(4) entscheidet begründet, ob der Bereich für wartende Autos vergrößert werden soll.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle.	6			
2	(2) bestimmt den gesuchten vollen Verkaufspreis.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Zufallsvariable X: „Anzahl fehlerhafter Teile“ unter zufällig ausgewählten Teilen kann als binomialverteilt angenommen werden.
800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.

(1) *Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft.“
B: „Mindestens 25 der Teile sind fehlerhaft.“

(2) *Bestimmen Sie die zu erwartende Anzahl fehlerhafter Teile und die Standardabweichung von X.*

(3) *Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens* 95 % *mindestens ein Teil fehlerhaft ist.*

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um die Vermutung zu überprüfen, werden in einer neuen Stichprobe wiederum 800 Teile ausgewählt. Sind in der Stichprobe höchstens 22 Teile fehlerhaft, so möchte der Produktionsleiter das neue Granulat weiter verwenden.

(4) *Zeigen Sie, dass unter der Annahme $p = 0{,}04$ die Wahrscheinlichkeit für höchstens* 22 *fehlerhafte Teile unter* 5 % *liegt.*

Name: ____________________

Pro Kunststoffteil möchte das Unternehmen einen durchschnittlichen Gewinn von 1 Euro machen. Dabei belaufen sich die Herstellungskosten auf 0,50 Euro pro Kunststoffteil. Der Verkaufspreis *v* wird vom Unternehmen festgesetzt, wobei fehlerhafte Teile nicht verkauft werden.

(5) *Begründen Sie, dass mit Hilfe der Gleichung* $0{,}04 \cdot (-0{,}5) + 0{,}96 \cdot (v - 0{,}5) = 1$ *der Verkaufspreis bestimmt werden kann.*

(6) Das neue Granulat wird nun verwendet und verursacht in Wirklichkeit nur noch 2 % fehlerhafte Teile. Die Herstellungskosten wurden durch den Wechsel des Granulats nicht beeinflusst.
Ermitteln Sie den prozentualen Preisnachlass, den das Unternehmen beim Verkaufspreis nun gewähren kann.

(5 + 4 + 5 + 2 + 4 + 5 Punkte)

b) Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größe der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

Ein Spieler muss das Glücksrad in jedem Spiel dreimal drehen. Er gewinnt das Spiel, wenn er dreimal die gleiche Farbe erzielt.

(1) *Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dreimal die gleiche Farbe zu erzielen,* $\frac{1}{6}$ *beträgt.*

Name: ____________________

Es werden 10 Spiele absolviert. Die Zufallsvariable Y: „Anzahl der Spiele, in denen dreimal die gleiche Farbe erzielt wird“ ist binomialverteilt.

(2) *Entscheiden Sie, welcher der folgenden Ansätze zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E: „In genau 3 der 10 Spiele wird jeweils dreimal die gleiche Farbe erzielt“ genutzt werden kann, und erläutern Sie die einzelnen Bestandteile dieses ausgewählten Ansatzes.*

(I) $P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

(II) $P(E) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

(III) $P(E) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

(3) Es werden die Ereignisse
E_1: „In allen 10 Spielen wird jeweils dreimal die gleiche Farbe erzielt“ und
E_2: „In 30 Drehungen wird immer die gleiche Farbe erzielt“ betrachtet.

Beurteilen Sie die Aussage: „Ob Ereignis E_1 oder Ereignis E_2 untersucht wird, ist egal, da sie das Gleiche aussagen und mit derselben Wahrscheinlichkeit eintreten.“

(4 + 5 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Sei X: „Anzahl der fehlerhaften Teile“. X ist binomialverteilt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 30 der Teile fehlerhaft sind, beträgt dann
$P_{800;0,04}(X = 30) \approx 0,069$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 der Teile fehlerhaft sind, beträgt dann
$P_{800;0,04}(X \geq 25) = 1 - P_{800;0,04}(X \leq 24) \approx 0,916$.

(2) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 800 \cdot 0,04 = 32$. Es sind also 32 fehlerhafte Teile zu erwarten. Für die Standardabweichung von X gilt $\sigma = \sqrt{800 \cdot 0,04 \cdot (1-0,04)} \approx 5,543$.

(3) Gesucht ist n, so dass $P_{n;0,04}(X \geq 1) = 1 - P_{n;0,04}(X = 0) \geq 0,95$.
Es gilt: $1-(1-0,04)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\log(1-0,95)}{\log(1-0,04)} \approx 73,385$.
Es müssen also mindestens 74 Kunststoffteile ausgewählt werden.

(4) Es ist $P_{800;0,04}(X \leq 22) \approx 0,038 < 0,05$.

(5) Ist ein Kunststoffteil fehlerhaft, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,04$ vorkommt, entstehen Kosten in Höhe von 0,50 Euro und es kann nicht verkauft werden. Ist es nicht fehlerhaft, was mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 vorkommt, macht das Unternehmen einen Gewinn von $(v - 0,50)$ Euro. Da der durchschnittliche Gewinn 1 Euro pro Kunststoffteil betragen soll, kann mit der angegebenen Gleichung der Verkaufspreis bestimmt werden.

(6) Bei Verwendung des alten Granulats ergibt sich aus der Gleichung in (5) ein Verkaufspreis von v = 1,5625 Euro.
Bei Verwendung des neuen Granulats ergibt sich mit Hilfe der Gleichung
$0,02 \cdot (-0,5) + 0,98 \cdot (v_{neu} - 0,5) = 1$ ein Verkaufspreis von ca. 1,5306 Euro.
Der prozentuale Preisnachlass, den das Unternehmen gewähren kann, beträgt somit
$1 - \left(\dfrac{1,5306}{1,5625}\right) \approx 0,020$, also ca. 2,0 %.
[Wird mit gerundeten Werten des Verkaufspreises gerechnet, erhält man einen prozentualen Preisnachlass von ca. 1,9 %.]

Teilaufgabe b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Dreh den blauen Sektor zu treffen, beträgt $\frac{1}{2}$, den roten Sektor zu treffen $\frac{1}{3}$ und den grünen Sektor zu treffen $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit bei dreifachem Drehen, dreimal die gleiche Farbe zu erzielen, beträgt dann
$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{6}$.

(2) Für die Berechnung des Ereignisses kann ausschließlich der Ansatz (III) verwendet werden. Dabei steht *P(E)* für die Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignisses *E*. Der Binomialkoeffizient $\binom{10}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, wie die drei Spiele mit „dreimal gleiche Farbe“ unter den zehn Spielen verteilt sein können. $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ gibt die Wahrscheinlichkeit für drei Spiele mit „dreimal gleiche Farbe“ an und $\left(\frac{5}{6}\right)^7$ die Wahrscheinlichkeit für sieben Spiele ohne „dreimal gleiche Farbe“.

(3) Zwar wird das Glücksrad bei beiden Ereignissen jeweils 30 Mal gedreht, die Betrachtung der 30 Drehungen ist aber eine unterschiedliche. Während bei E_2 in *allen* Drehungen die gleiche Farbe erzielt werden muss, muss bei E_1 nur in Dreh 1 bis 3, 4 bis 6 usw. jeweils die gleiche Farbe erzielt werden. Dabei kann sich die Farbe, die beispielsweise in Dreh 1 bis 3 erzielt wird, von der Farbe, die in Dreh 4 bis 6 erzielt wird, unterscheiden.

Die Wahrscheinlichkeit für E_1 beträgt somit $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$, während die Wahrscheinlichkeit für E_2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{30} + \left(\frac{1}{3}\right)^{30} + \left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ beträgt.

E_1 und E_2 sagen also weder das Gleiche aus noch treten sie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Die Aussage ist vollkommen falsch.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A.	2			
2	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B.	3			
3	(2) bestimmt die zu erwartende Anzahl.	2			
4	(2) bestimmt die Standardabweichung.	2			
5	(3) ermittelt die gesuchte Anzahl.	5			
6	(4) zeigt den gegebenen Sachverhalt.	2			
7	(5) begründet, dass die angegebene Gleichung zur Bestimmung des Verkaufspreises genutzt werden kann.	4			
8	(6) ermittelt den prozentualen Preisnachlass.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (25) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**25**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt den gegebenen Sachverhalt.	4			
2	(2) entscheidet, welcher Ansatz verwendet werden kann.	2			
3	(2) erläutert die einzelnen Bestandteile des Ansatzes.	3			
4	(3) beurteilt die Aussage.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0