Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 + 2x^2$.

(1) *Weisen Sie nach, dass* $x_1 = -2$ *und* $x_2 = 0$ *die einzigen Nullstellen von f sind.*

(2) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.*

(2 + 4 Punkte)

b) Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

(1) *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:*

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \qquad &= 13 \\ x_2 + 2\cdot x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(2) Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit dem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \qquad &= 5 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + p\cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Begründen Sie, dass dieses Gleichungssystem für p = 1 unendlich viele Lösungen und für p = 0 keine Lösung besitzt.

(4 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben sind die Punkte $A\,(-2|1|-2)$, $B\,(1|2|-1)$ und $C\,(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D\,(d\,|1|4)$.

(1) *Begründen Sie mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, dass A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, und geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der das Dreieck ABC liegt.*

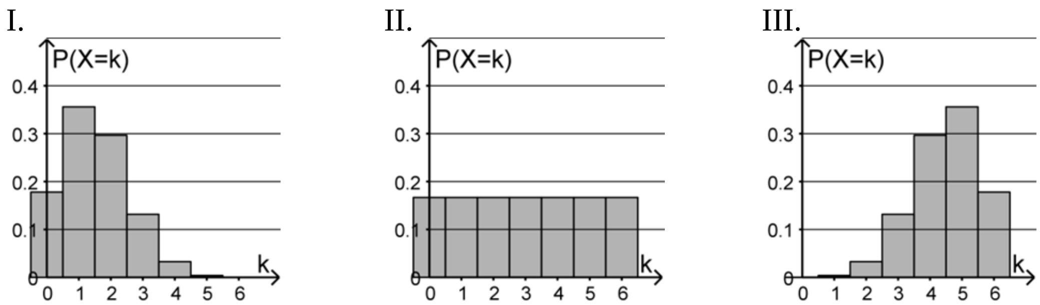
(2) *Ermitteln Sie den Wert von d, so dass das Dreieck ABD im Punkt B rechtwinklig ist.*

(4 + 2 Punkte)

d) Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur. Die Anzahl der Überraschungseier mit einer Figur innerhalb einer Stichprobe ist binomialverteilt mit $p = 0{,}25$.

(1) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass in genau zwei Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2 + 4 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$.

(2) $\int\limits_{-2}^{0} \left(x^3 + 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(4 - \frac{2 \cdot 8}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

Der Flächeninhalt beträgt also $\frac{4}{3}$ (FE).

Teilaufgabe b)

(1) Mithilfe des Additionsverfahrens erhält man aus II – III: $x_3 = 2$.

Durch Einsetzen in II oder III ergibt sich $x_2 = 1$ und durch Einsetzen in I erhält man $x_1 = 5$. Damit lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(5\,;1\,;2)\}$.

(2) Für $p = 1$ sind die Gleichungen I und III übereinstimmend. Das verbleibende LGS hat Dreiecksform und ist unterbestimmt. Damit existieren unendlich viele Lösungen.

Für $p = 0$ widersprechen sich die Gleichungen II und III, weshalb das LGS keine Lösung besitzt.

Teilaufgabe c)

(1) Da $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ offensichtlich nicht kollinear sind, liegen A, B, C nicht auf einer Geraden.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

(2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d-1 \\ 1-2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (d-1) + (-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{3}$.

Teilaufgabe d)

(1) $P(E) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$.

(2) Abbildung I zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

X ist binomialverteilt, der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$.

Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung und gehört damit nicht zu X.

Abbildung III zeigt eine Verteilung mit einem Erwartungswert, der größer als 1,5 ist.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.	2			
2	(2) berechnet den Inhalt der Fläche.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt x_3 z. B. mithilfe des Additionsverfahrens.	2			
2	(1) bestimmt x_1 und x_2 mithilfe der Gleichungen.	2			
3	(2) begründet, dass dieses Gleichungssystem für $p = 1$ unendlich viele Lösungen besitzt.	1			
4	(2) begründet, dass dieses Gleichungssystem für $p = 0$ keine Lösung besitzt.	1			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass A, B, C nicht auf einer Geraden liegen.	2			
2	(1) gibt eine Gleichung der Ebene an.	2			
3	(2) ermittelt den Wert von d, so dass das Dreieck ABD im Punkt B rechtwinklig ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	2			
2	(2) gibt an, welche Abbildung die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, und begründet, dass die anderen Abbildungen diese nicht darstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem Produktionsprozess werden Flüssigkeiten erhitzt, eine Zeit lang bei konstanter Temperatur gehalten und anschließend wieder abgekühlt.

a) Betrachtet wird zunächst ein Vorgang, bei dem der Temperaturverlauf durchgehend gesteuert wird. In der Tabelle sind Ergebnisse einer Temperaturmessung angegeben.

Zeit in Minuten	0	2	4	10	15	20	40	60	80
Temperatur in °C	23,0	54,0	76,9	76,8	77,3	76,8	37,9	26,0	23,2

Der Temperaturverlauf kann **während des Erhitzens** und **während des Abkühlens** mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$$

modellhaft beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur in °C.

(1) *Geben Sie an, welche Temperaturen die Funktion f für den Beginn des Vorgangs und für den Zeitpunkt zwei Minuten nach diesem Beginn liefert.*
Bestimmen Sie jeweils die prozentuale Abweichung von den angegebenen Messwerten.

(2) *Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt hat.*

Vergleichen Sie die zu diesem Punkt gehörende Temperatur mit den angegebenen Messwerten.

Name: ____________________

(3) *Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f und erläutern Sie die Bedeutung der t-Koordinate („x-Wert") des Wendepunkts im Sachzusammenhang.*

(4) *Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f für große Werte von t und interpretieren Sie diesen Verlauf im Sachzusammenhang.*

Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit im Produktionsprozess konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion *f* mindestens diese Temperatur liefert.

(5) *Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen dieser Zeitabschnitt beginnt und endet. Stellen Sie den konstanten Temperaturverlauf in diesem Zeitabschnitt in Abbildung 1 dar.*

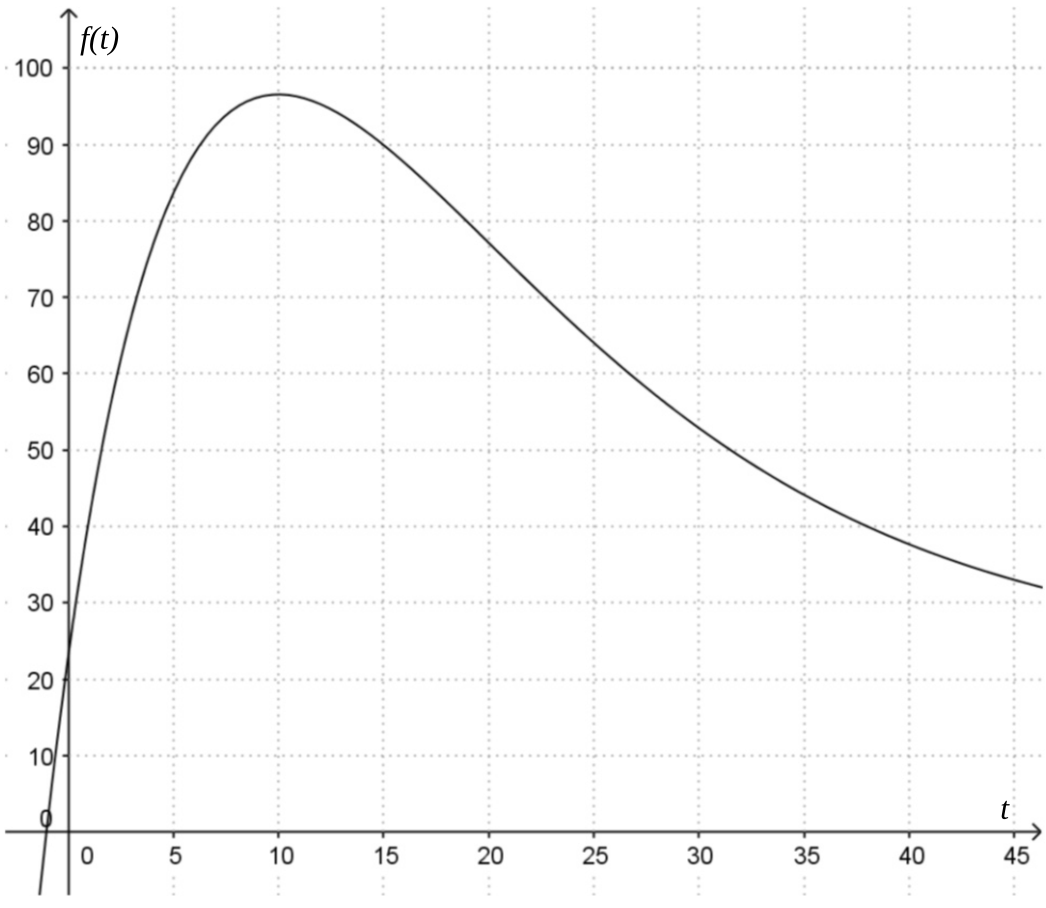


Abbildung 1

Name: ____________________

Die Steuerung des Prozesses kann so variiert werden, dass sich der Temperaturverlauf während des gesamten Vorgangs für $t \geq 0$ durch eine der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(t) = 23 + 20t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot k \cdot t}$ mit $k > 0$ beschreiben lässt. Dabei ist *t* die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f_k(t)$ die Temperatur in °C.

(6) Die in der *Abbildung 2* dargestellten Graphen *A*, *B* und *C* gehören jeweils zu einem der Werte $k = 0{,}5$, $k = 2$ und $k = 5$.

Entscheiden Sie, welcher dieser Werte welchem Graphen zugeordnet werden kann.

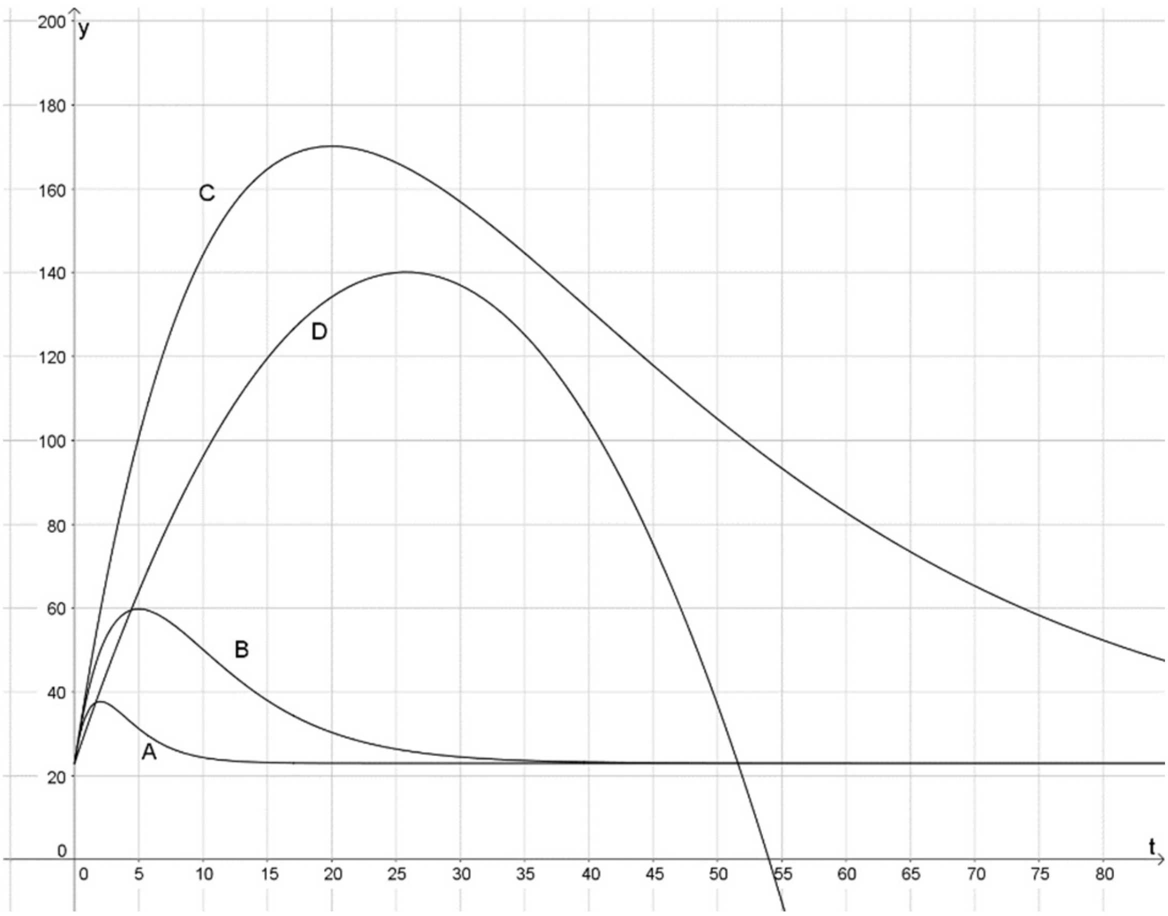


Abbildung 2

(7) *Begründen Sie, dass der in der Abbildung dargestellte Graph D nicht zu einer der Funktionen f_k gehören kann.*

(4 + 9 + 4 + 3 + 5 + 3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

b) Betrachtet wird nun ein Vorgang, bei dem die Steuerung des Temperaturverlaufs zwanzig Minuten nach Beginn des Vorgangs abgeschaltet wird. Das anschließende Abkühlen der Flüssigkeit lässt sich für $t \geq 20$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(t) = 23 + c \cdot e^{d \cdot t}$$

und $c, d \in \mathbb{R}$ beschreiben.

Zu Beginn des Abkühlens soll die Temperatur 77 °C und die momentane Änderungsrate der Temperatur –3,5 °C pro Minute betragen.

(1) *Bestimmen Sie passende Werte von c und d.*

(2) *Ermitteln Sie für diese Phase des Abkühlens im Intervall* $[20; 80]$ *denjenigen Zeitpunkt, für den die Werte der Funktion* f *und der Funktion* h *mit* $c = 197{,}4$ *und* $d = -0{,}065$ *am stärksten voneinander abweichen.*

Geben Sie die zugehörige Abweichung an.

(5 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     - Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     - einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es gilt $f(0)=23$, womit es für $t=0$ keine Abweichung gibt.

Weiterhin gilt $f(2)\approx 55{,}7$ mit $\frac{55{,}7-54{,}0}{54{,}0}\approx 0{,}031$, womit der Funktionswert für $t=2$ den Messwert um $3{,}1\,\%$ überschreitet.

[Hinweis: Wenn $f(2)$ nicht gerundet wird, ergibt sich eine Abweichung von $\approx 3{,}2\,\%$.]

(2) Es gilt

$$f'(t)=20\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\cdot\left(1-\frac{1}{10}\cdot t\right),$$

$$f''(t)=-2\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\cdot\left(2-\frac{1}{10}\cdot t\right).$$

Notwendige Bedingung:

Ist t_E eine Extremstelle, dann gilt $f'(t_E)=0$.

Da $20\cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot t}\neq 0$ gilt, genügt die Betrachtung von

$$\left(1-\frac{1}{10}\cdot t_E\right)=0$$

$$\Leftrightarrow t_E=10.$$

Daraus folgt, dass nur diese eine Stelle als Extremstelle in Frage kommt.

Hinreichende Bedingung:

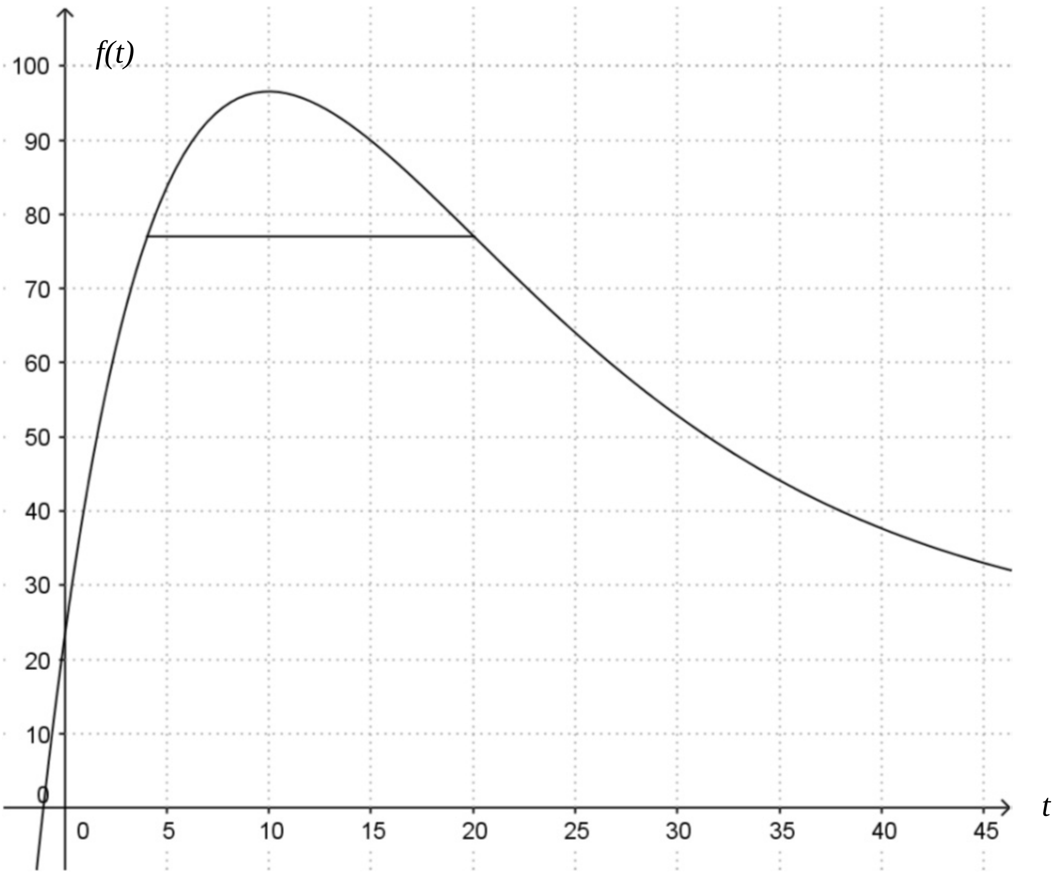
Da $f'(10)=0$ und $f''(10)\approx -0{,}7\neq 0$ gilt, handelt es sich um eine Extremstelle [Maximalstelle] mit dem Funktionswert $f(10)\approx 96{,}6$.

Die Temperatur von 96,6 °C ist deutlich größer als die Messwerte.

(3) Die Wendestelle ist eine Extremstelle der ersten Ableitung.
Mithilfe des CAS kann diese Extremstelle bestimmt werden. Sie liegt bei $t = 20$ und ist eine Minimalstelle der Ableitung.
Es gilt $f(20) \approx 77{,}1$. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\left(20 \,|\, 77{,}1\right)$.
Außerdem gilt $f'(20) \approx -2{,}7$. Es handelt sich also um den Zeitpunkt, an dem die Temperatur am stärksten abnimmt.

(4) Für große Werte von t nähert sich der Graph von f der Geraden mit der Gleichung $y = 23$ an. Die Temperatur der Flüssigkeit nähert sich mit der Zeit 23 °C an.

(5) Zu lösen ist die Gleichung $f(t) = 77$. Mithilfe des CAS lassen sich die Zeitpunkte bestimmen. Es folgt $t_1 \approx 4{,}0$ [Min.] und $t_2 \approx 20{,}0$ [Min.].



(6) $k = 0{,}5 \to C$; $k = 2 \to B$ und $k = 5 \to A$.

(7) Es gilt $f_k(t) \geq 23$ für alle $t \geq 0$.
Der Graph D liegt für größere Werte von t unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 23$. Damit kann D nicht zu einer der Funktionen f_k gehören.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt

$h'(t) = c \cdot d \cdot e^{d \cdot t}$.

Damit lässt sich das folgende nichtlineare Gleichungssystem aufstellen:

$h(20) = 77 \quad \Leftrightarrow \quad 23 + c \cdot \mathrm{e}^{d \cdot 20} = 77,$

$h'(20) = -3{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad c \cdot d \cdot \mathrm{e}^{d \cdot 20} = -3{,}5.$

Mithilfe des CAS erhält man $c = 54 \cdot e^{1{,}2963} \approx 197{,}4$ und $d \approx -0{,}065$.

(2) Die Funktion d mit $d(t) = f(t) - h(t)$ ist die Differenzfunktion.

Ihre Extrempunkte (Maxima und Minima (falls der Betrag einer negativen Differenz größer als der Betrag des Maximums ist)) sowie ggf. die Randstellen sind Kandidaten für die stärkste Abweichung.

Die grafische Analyse mit dem CAS im Intervall [20, 80] liefert das Maximum bei $t \approx 25{,}86$ mit $d(25{,}86) \approx 2{,}2$ und das Minimum bei $t \approx 56{,}74$ mit $d(56{,}74) \approx -1{,}04$.

Da der Rand bei der grafischen Analyse im Intervall [20, 80] mit betrachtet wird, kann auf eine gesonderte Betrachtung von Randextrema verzichtet werden.

Nach ungefähr 25,86 Minuten erhält man die größte Abweichung von 2,2 °C.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die beiden Temperaturen an.	2			
2	(1) bestimmt jeweils die prozentuale Abweichung von den angegebenen Messwerten.	2			
3	(2) bestimmt die erste Ableitung und zeigt rechnerisch (mit einer notwendigen und hinreichenden Bedingung), dass der Graph von f genau einen Extrempunkt besitzt.	7			
4	(2) vergleicht den Funktionswert mit den angegebenen Messwerten.	2			
5	(3) bestimmt den Wendepunkt.	2			
6	(3) erläutert die Bedeutung im Sachzusammenhang.	2			
7	(4) beschreibt den Verlauf des Graphen für große Werte von t und interpretiert den Verlauf im Sachzusammenhang.	3			
8	(5) bestimmt die beiden gesuchten Zeitpunkte.	3			
9	(5) stellt den Temperaturverlauf grafisch dar.	2			
10	(6) entscheidet, welcher Wert welchem Graphen zugeordnet werden kann.	3			
11	(7) begründet, dass D nicht zu einer der Funktionen gehören kann.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (30) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**30**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die erste Ableitung, stellt das Gleichungssystem auf und bestimmt die Werte von *c* und *d*.	5			
2	(2) gibt die Differenzfunktion an, ermittelt den Zeitpunkt der stärksten Abweichung und gibt diese an.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Zeitspanne vom Sonnenaufgang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont überschreitet) bis zum Sonnenuntergang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont unterschreitet) wird als Tageslänge bezeichnet. Sie hängt vom Ort ab und ändert sich im Verlauf des Jahres.

In der folgenden *Abbildung 1* sind die Tageslängen in der kleinen ostwestfälischen Stadt Rahden für jeden ersten Tag eines Monats im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 1. Januar 2018 aufgetragen.

Vereinfachend wird hier angenommen, dass alle Monate die gleiche Länge von 30 Tagen haben.

Dabei entspricht $t = 0$ dem 1. Januar 2017, $t = \frac{1}{30} \approx 0{,}03$ entspricht dem 2. Januar 2017, …,

$t = 1$ entspricht dem 1. Februar 2017, $t = 1\frac{1}{30} \approx 1{,}03$ entspricht dem 2. Februar 2017 usw.

Name: ____________________

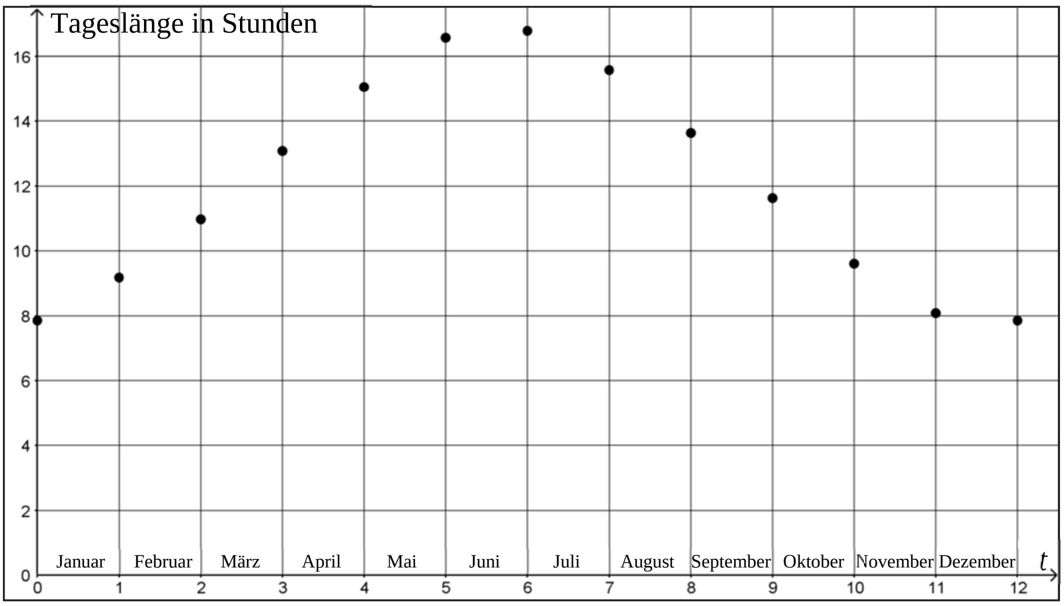


Abbildung 1

Zur Modellierung der Tageslängen in Rahden im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 wird von einem Schüler für $0 \leq t \leq 5{,}67$ die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = -0{,}08 \cdot t^3 + 0{,}6324 \cdot t^2 + 0{,}54432 \cdot t + 8,\; t \in \mathbb{R},$$

verwendet.

Dabei wird $f(t)$ als Tageslänge in Stunden aufgefasst.

a) (1) *Ermitteln Sie mit der Funktion f die Tageslänge in Rahden für den heutigen Tag (*3. *Mai, also* $t \approx 4{,}07$ *) und vergleichen Sie den von Ihnen berechneten Wert mit der tatsächlichen heutigen Tageslänge in Rahden von* 15 *Stunden und* 10 *Minuten.*

(2) *Geben Sie den Wert des Terms* $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}$ *an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(3) Vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 ($t \approx 5{,}67$) werden nördlich des Äquators (und damit auch in Rahden) die Tage immer länger.

Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Tatsache durch die Funktion f zutreffend modelliert wird.

Name: ____________________

(4) Für die zweite Ableitung f'' der Funktion f gilt die folgende Aussage:

$$f''(t) < 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 2{,}635\,.$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage für $2{,}635 < t < 5{,}67$ *unter Berücksichtigung von* a) (3) *im Sachzusammenhang.*

[Hinweis: Ein Nachweis der Aussage ist nicht erforderlich.]

(5) *Begründen Sie, dass die Funktion f nicht zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr* 2017 *geeignet ist.*

(4 + 4 + 6 + 3 + 3 Punkte)

b) Der 21. Juni 2017 ($t \approx 5{,}67$) ist der längste Tag des Jahres 2017, der 21. Dezember 2017 ($t \approx 11{,}67$) ist der kürzeste Tag des Jahres 2017 in Rahden.

Eine Freundin des Schülers schlägt vor, zur Modellierung der Tageslängen vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018 für $5{,}67 \le t \le 12$ eine ganzrationale Funktion g dritten Grades zu verwenden, deren Ableitung g' eine quadratische Funktion von folgender Form ist:

$$g'(t) = a \cdot (t - 5{,}67) \cdot (t - 11{,}67)\ ,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

wobei a eine noch zu bestimmende reelle Zahl ist.

Name: ____________________

(1) *Skizzieren Sie in Abbildung 2 die vier zu* $a=-0{,}5$, $a=-0{,}25$, $a=0{,}25$ *und* $a=0{,}5$ *gehörenden Graphen von* g'.

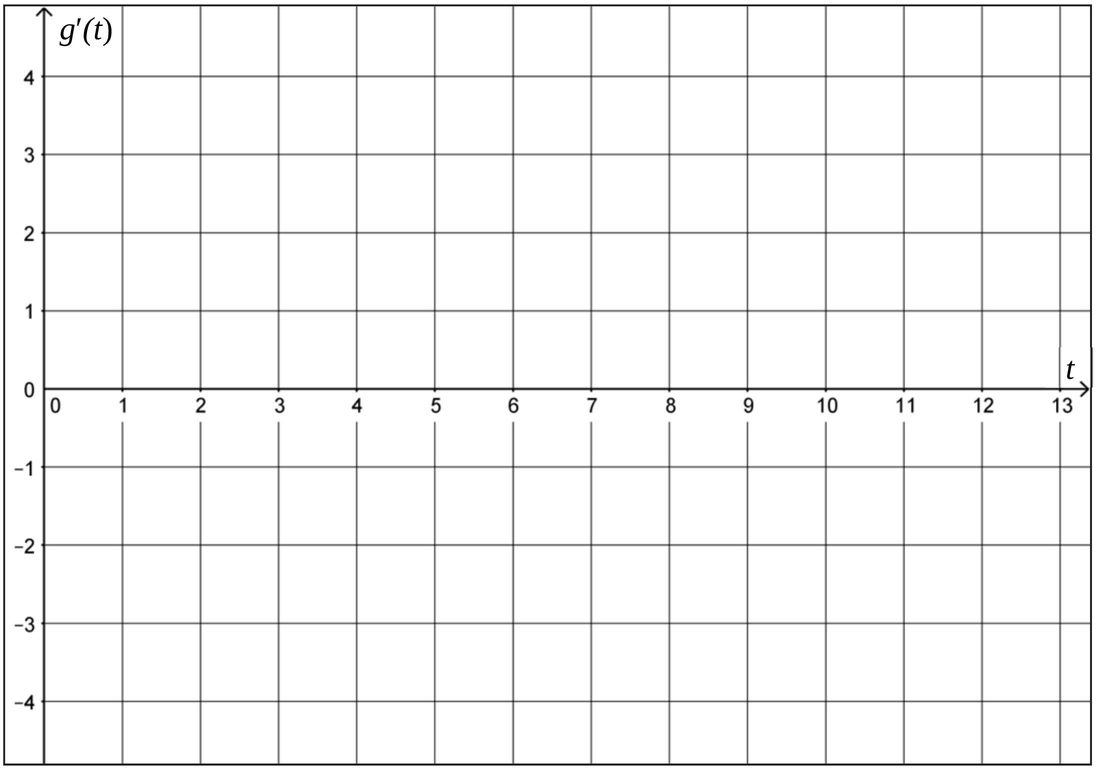


Abbildung 2

(2) *Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, von dem Ansatz* $g'(t)=a\cdot(t-5{,}67)\cdot(t-11{,}67)$ *auszugehen, wenn die Tageslängen ab dem* 21. *Juni* 2017 *durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades modelliert werden sollen.*

Entscheiden Sie begründet, ob a zur Modellierung des gegebenen Sachzusammenhangs positiv oder negativ sein muss.

Name: ____________________

(3) Die Freundin des Schülers hat herausgefunden, dass am 21. Dezember 2017 die Tageslänge in Rahden 7,73 Stunden beträgt. Um den passenden Wert von a zu bestimmen, verwendet sie die Gleichung

$$f(5{,}67)+\int_{5{,}67}^{11{,}67} g'(t)\,\mathrm{d}t = 7{,}73\,.$$

Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

Bestimmen Sie den passenden Wert von a.

(4) *Stellen Sie ausgehend von* g' *eine Gleichung einer Funktion g zur Modellierung der Tageslängen in Rahden vom* 21. *Juni* 2017 *bis zum* 1. *Januar* 2018 *auf.*

(4 + 6 + 7 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von einem Parameter bei ganzrationalen Funktionen
     – Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei *p(x)* ein Polynom höchstens zweiten Grades ist
     – einfache Summe der oben genannten Funktionstypen
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(4{,}07) \approx 15{,}30$.

Die mit der Funktion f berechnete Tageslänge beträgt ungefähr 15 Stunden und 18 Minuten. Die berechnete Tageslänge unterscheidet sich damit um etwa 8 Minuten von der tatsächlichen Tageslänge in Rahden am 3. Mai 2017.

(2) $\frac{f(4)-f(2)}{4-2} \approx 2{,}10$.

Im Zeitraum vom 1. März 2017 bis zum 1. Mai 2017 nimmt die Tageslänge in Rahden durchschnittlich um 2,1 Stunden (2 Stunden und 6 Minuten) pro Monat zu.

(3) $f'(t) = -0{,}24 \cdot t^2 + 1{,}2648 \cdot t + 0{,}54432$.

Die Gleichung $f'(t) = 0$ hat die Lösungen $t = -0{,}4$ und $t = 5{,}67$. Wegen $f'(0) = 0{,}54432 > 0$ gilt $f'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-0{,}4 < t < 5{,}67$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t < 5{,}67$.

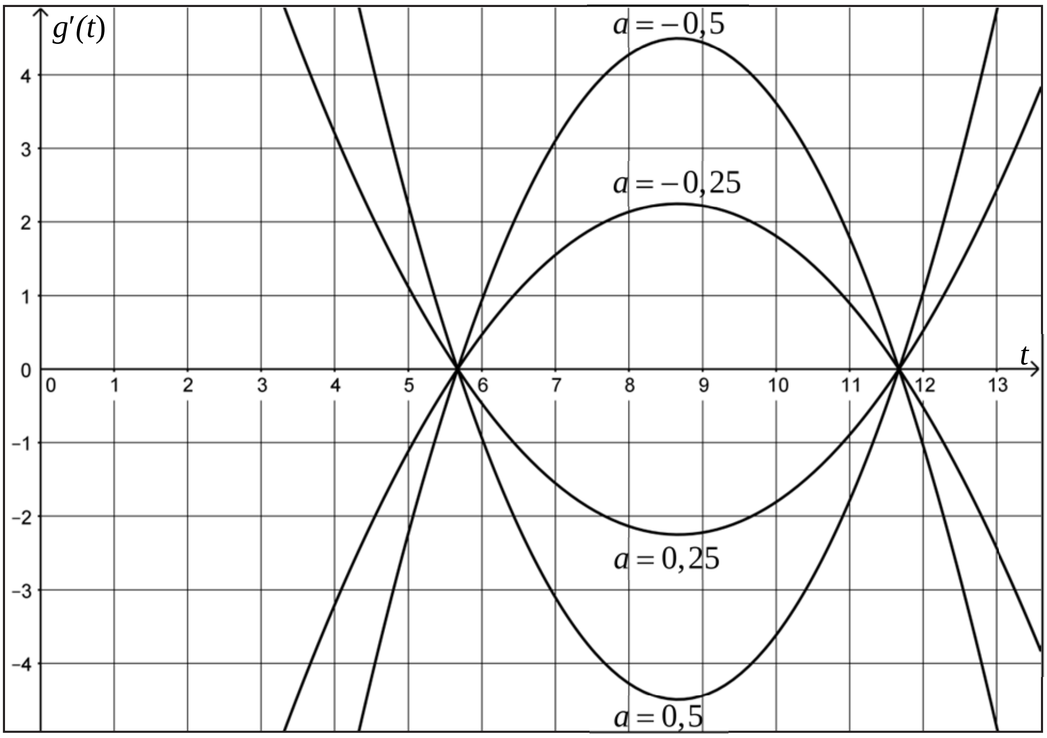
Da die Änderungsrate von f für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t < 5{,}67$ positiv ist, wird die Tatsache, dass die Tage vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 immer länger werden, durch die Funktion f zutreffend modelliert.

(4) Für $2{,}635 < t < 5{,}67$ (d. h. ungefähr vom 20. März 2017 bis zum 21. Juni 2017) nehmen die Tageslängen immer langsamer zu.

(5) Ab ungefähr $t = 9{,}7$ werden die Funktionswerte von f negativ, die Funktion ist daher nicht zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr 2017 geeignet.

Teilaufgabe b)

(1)



(2) Da der 21. Juni 2017 der längste und der 21. Dezember 2017 der kürzeste Tag des Jahres 2017 sind, ist es sinnvoll, zur Modellierung der Tageslängen ab dem 21. Juni 2017 eine Funktion zu verwenden, deren Graph an den Stellen $t = 5,67$ und $t = 11,67$ waagerechte Tangenten besitzt. Die zugehörige Ableitungsfunktion muss dann bei $t = 5,67$ und $t = 11,67$ Nullstellen besitzen, was für alle $a \in I\!R$ für alle Funktionen g' mit $g'(t) = a \cdot (t - 5,67) \cdot (t - 11,67)$ der Fall ist.

Da die Tage vom 21. Juni 2017 bis zum 21. Dezember 2017 kürzer werden, muss die Änderungsrate der Tageslängen für $5,67 < t < 11,67$ negativ sein. a muss daher positiv sein.

(3) Durch das Integral $\int_{5,67}^{11,67} g'(t)\,\mathrm{d}t$ über die Änderungsrate g' ergibt sich die Gesamtänderung der Tageslängen im Zeitraum vom 21. Juni 2017 bis zum 21. Dezember 2017. Wird diese Änderung zur Tageslänge am 21. Juni 2017 addiert, so ergibt sich die Tageslänge am 21. Dezember 2017.

$f(5,67)+\int_{5,67}^{11,67} g'(t)\,\mathrm{d}t = 7,73 \Leftrightarrow a \approx 0,2529$.

[Hinweis: Abhängig von Rundungen in Zwischenergebnissen können sich geringfügige Abweichungen ergeben.]

(4) $g(t)=f(5,67)+\int_{5,67}^{t} g'(x)\,\mathrm{d}x$

$\left(\approx 0,0843\cdot t^3-2,1927\cdot t^2+16,7341\cdot t-22,9234\right)$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt mit der Funktion f die Tageslänge in Rahden für den 3. Mai ($t \approx 4{,}07$).	2			
2	(1) vergleicht den von ihm berechneten Wert mit der tatsächlichen Tageslänge in Rahden.	2			
3	(2) gibt den Wert des Terms $\frac{f(4)-f(2)}{4-2}$ an.	2			
4	(2) interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	2			
5	(3) zeigt rechnerisch, dass die Tatsache, dass die Tage immer länger werden, durch die Funktion f zutreffend modelliert wird.	6			
6	(4) interpretiert die Bedeutung der Aussage $f''(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 2{,}635$ für $2{,}635 < t < 5{,}67$ unter Berücksichtigung von a) (3) im Sachzusammenhang.	3			
7	(5) begründet, dass die Funktion f nicht zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr 2017 geeignet ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**20**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) skizziert in Abbildung 2 die vier zu $a=-0{,}5$, $a=-0{,}25$, $a=0{,}25$ und $a=0{,}5$ gehörenden Graphen von g'.	4			
2	(2) begründet, dass es sinnvoll ist, von dem Ansatz $g'(t)=a\cdot(t-5{,}67)\cdot(t-11{,}67)$ auszugehen, wenn die Tageslängen ab dem 21. Juni 2017 durch eine ganzrationale Funktion g dritten Grades modelliert werden sollen.	3			
3	(2) entscheidet begründet, ob a zur Modellierung des gegebenen Sachzusammenhangs positiv oder negativ sein muss.	3			
4	(3) interpretiert die Gleichung $f(5{,}67)+\int_{5{,}67}^{11{,}67} g'(t)\,\mathrm{d}t=7{,}73$ im Sachzusammenhang.	4			
5	(3) bestimmt den passenden Wert von a.	3			
6	(4) stellt ausgehend von g' eine Gleichung einer Funktion g zur Modellierung der Tageslängen in Rahden vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018 auf.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**20**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

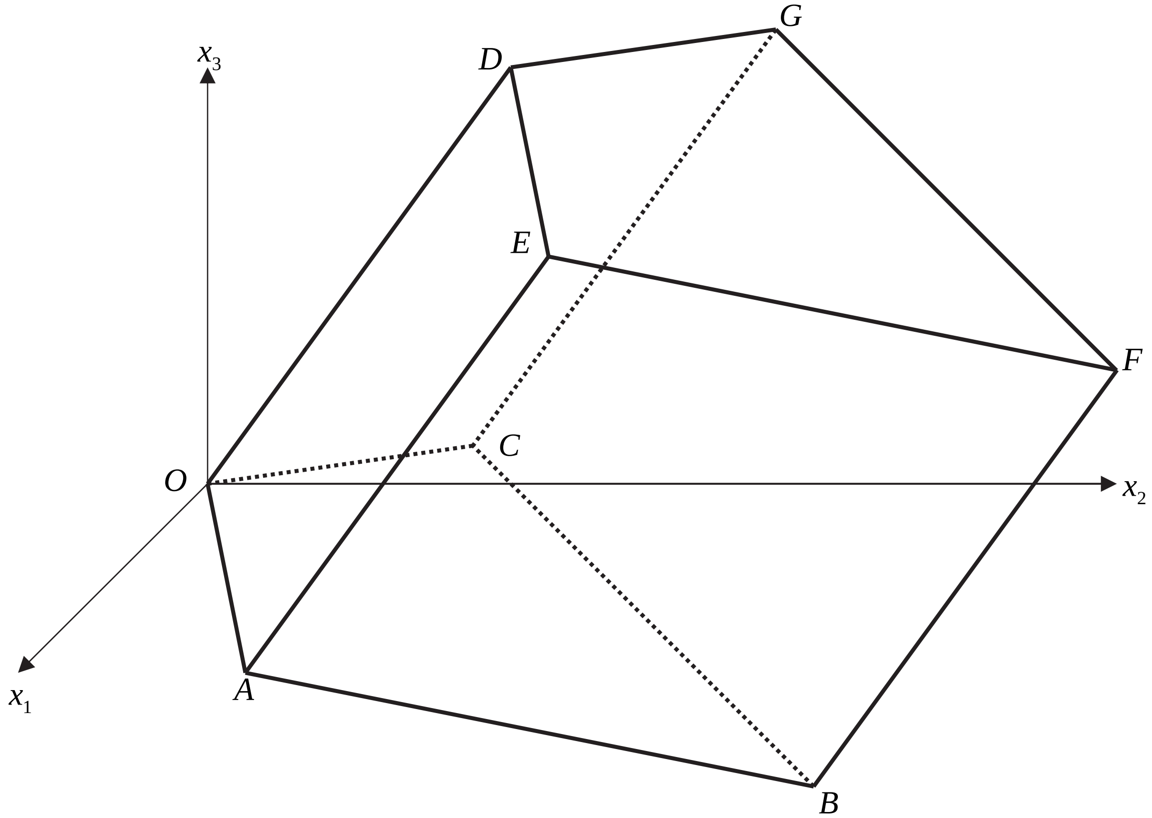
Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,4\,|\,-2)$, $B(0\,|\,16\,|\,-8)$, $C(-6\,|\,4\,|\,-2)$ und $D(0\,|\,8\,|\,11)$ Eckpunkte eines **schiefen** Prismas[1] $OABCDEFG$ mit viereckiger Grundfläche $OABC$ (siehe Abbildung).



Abbildung

[1] Ein Prisma besitzt eine Grundfläche und eine dazu parallele deckungsgleiche Deckfläche.
Die Seitenflächen sind Parallelogramme. Bei einem schiefen Prisma stehen die Seitenkanten **nicht** senkrecht auf der Grundfläche. Das Volumen ist das Produkt aus der Grundfläche und der Höhe, die senkrecht auf der Grundfläche steht.

Name: ____________________

a) (1) *Stellen Sie eine Parameterform der Geraden g auf, die die Punkte O und D enthält.*

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte F und G.*

(2 + 4 Punkte)

b) (1) *Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene H auf, die die Punkte O, A und B enthält.*

[Mögliche Parametergleichung: $H:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\6\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\ (r,s\in\mathbb{R})$]

(2) *Zeigen Sie, dass der Punkt D auf der Geraden* $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\6\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$*, liegt.*

Die Gerade *h* schneidet die Ebene *H* senkrecht.

(3) *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden h und der Ebene H und die Länge der Strecke* $\overline{DS}$.

[Zur Kontrolle: $\left|\overline{DS}\right|=\sqrt{180}$]

(3 + 3 + 6 Punkte)

c) (1) *Zeigen Sie, dass die Diagonalen* $\overline{AC}$ *und* $\overline{OB}$ *des Vierecks OABC zueinander senkrecht sind und sich im Mittelpunkt T von* $\overline{AC}$ *schneiden.*

[Zur Kontrolle: $T(0\,|\,4\,|\,-2)$]

Nach Aufgabe c) (1) ist das Viereck *OABC* ein Drachenviereck.

(2) *Bestimmen Sie das Volumen des Prismas OABCDEFG.*

(7 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Punkte O, B, F und D liegen in der Ebene K.

Begründen Sie, dass diese Ebene das Prisma in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

(4 Punkte)

e) Der Punkt B wird auf der Strecke $\overline{BO}$ zum Punkt $B' \neq O$ so verschoben, dass alle Seiten des Vierecks $OAB'C$ gleich lang sind.

(1) *Ermitteln Sie die Koordinaten von B'.*

(2) *Begründen Sie, dass das Viereck $OAB'C$ kein Quadrat ist.*

(4 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Eine Parametergleichung der Geraden g ist z. B.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ bzw.

$g: \vec{x} = m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$ $(m \in \mathbb{R})$.

(2) Es gilt z. B.: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Die gesuchten Koordinaten sind: $F(0\,|\,24\,|\,3)$ und $G(-6\,|\,12\,|\,9)$.

Teilaufgabe b)

(1) Eine Parametergleichung der Ebene H ist z. B.: H: $\vec{x} = r^* \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$ bzw.

$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(r, r^*, s, s^* \in \mathbb{R})$.

(2) Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0 = 0 \\ v = -2 \\ v = -2 \end{matrix} \right|$ folgt, dass $D \in h$ gilt.

(3) Schnittpunktberechnung von h und H:

$$r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}r=0\\2r+2s=6-t\\-r-s=7-2t\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}r=0\\s=1\\t=4\end{matrix}\right|$$

Als Schnittpunkt erhält man $S(0\,|\,2\,|-1)$.

Es gilt: $\left|\overline{DS}\right|=\left|\overrightarrow{DS}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\6\\12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{180}\left[=6\sqrt{5}\approx 13{,}42\,[\text{LE}]\right]$.

Teilaufgabe c)

(1) Es ist $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\16\\-8\end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\-8\end{pmatrix}=0$ gilt, ist $\overline{AC}\perp\overline{OB}$.

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist der Punkt $T(0\,|\,4\,|-2)$.

Eine Gleichung der Geraden OB ist $OB:\vec{x}=u\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\-8\end{pmatrix}\ (u\in\mathbb{R})$.

Mit $\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=u\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\-8\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}0=0\\u=0{,}25\\u=0{,}25\end{matrix}\right|$ und $0\le u\le 1$ folgt, dass T auf $\overline{OB}$ liegt und damit

der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{OB}$ ist.

(2) Es gilt $V_{Prisma}=G_{Prisma}\cdot h_{Prisma}$. Da das Viereck $OABC$ ein Drachenviereck ist, gilt für

den Flächeninhalt: $G_{Prisma}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-12\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\16\\-8\end{pmatrix}\right|=6\sqrt{320}\left[=48\sqrt{5}\approx 107{,}33\,[\text{FE}]\right]$.

Da $D\in h$ und $h\perp H$ ist, gilt für die Höhe des Prismas:

$h_{Prisma}=\left|\overline{DS}\right|=\sqrt{180}\left[=6\sqrt{5}\approx 13{,}42\,[\text{LE}]\right]$. Es folgt: $V_{Prisma}=1440\,[\text{VE}]$.

Teilaufgabe d)

Aus c) (1) und der nachfolgenden Info folgt, dass $\overline{OB}$ die Fläche des Vierecks *OABC* halbiert. Entsprechend halbiert $\overline{DF}$ die Fläche des Vierecks *DEFG*. Die Ebene *K* enthält die Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{DF}$. Das Prisma wird durch diese Ebene in zwei „Teilprismen" zerlegt. Da $\left|\overline{DS}\right|$ die Höhe beider Teilprismen ist, besitzen beide Teilprismen wegen

$V_{Prisma} = \textit{Grundfläche x Höhe}$ denselben Volumeninhalt.

Teilaufgabe e)

(1) In dem Drachenviereck *OABC* sind die Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$ ($\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OC}\right| = \sqrt{56}\,[\text{LE}]$) gleich lang. Wenn alle vier Seiten gleich lang sein sollen, muss das Viereck eine Raute sein. In einer Raute halbieren sich die Diagonalen. Der Mittelpunkt $T(0\,|\,4\,|\,-2)$ der Strecke $\overline{AC}$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen der gesuchten Raute. Die Koordinaten von B' erhält man aus $\overrightarrow{OB'} = 2\cdot\overrightarrow{OT}$.
Es folgt $B'(0\,|\,8\,|\,-4)$.

(2) Da z. B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -16 \neq 0$ ist, besitzt das Viereck *OAB′C* zumindest in *O* keinen rechten Winkel. Das Viereck ist deswegen kein Quadrat.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt eine Parameterform der Geraden *g* auf, die die Punkte *O* und *D* enthält.	2			
2	(2) bestimmt die Koordinaten der Punkte *F* und *G*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt eine Parametergleichung der Ebene *H* auf, die die Punkte *O*, *A* und *B* enthält.	3			
2	(2) zeigt, dass der Punkt *D* auf der Geraden *h* liegt.	3			
3	(3) berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden *h* und der Ebene *H* und die Länge der Strecke $\overline{DS}$.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{OB}$ zueinander senkrecht sind.	3			
2	(1) zeigt, dass sich die Diagonalen im Mittelpunkt T von $\overline{AC}$ schneiden.	4			
3	(2) bestimmt das Volumen des Prismas *OABCDEFG*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	begründet, dass diese Ebene das Prisma in zwei volumengleiche Teile zerlegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**4**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt die Koordinaten von B'.	4			
2	(2) begründet, dass das Viereck $OAB'C$ kein Quadrat ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

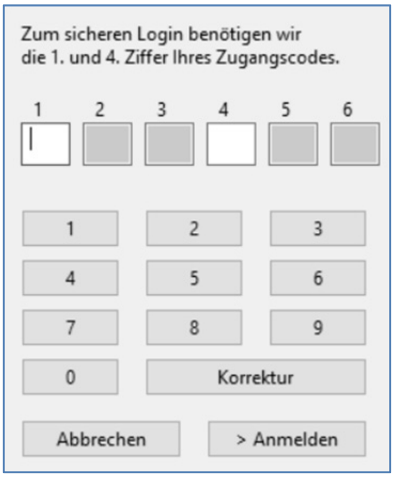
Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Beim Onlinebanking gibt es verschiedene Sicherheitsvorkehrungen. Bei einer Sicherheitsabfrage muss der Benutzer (nennen wir ihn Ben) zusätzlich zu seinem Onlinebanking-PIN einen Zahlencode, der aus sechs Ziffern besteht, kennen und teilweise eingeben, um sich anzumelden.

Damit eine potenzielle Angreiferin (nennen wir sie Anna) nicht auf Anhieb alle sechs Ziffern erfährt, werden von der Bank bei jedem Anmeldevorgang nur zwei zufällig ausgewählte Ziffern abgefragt. Welche der sechs Ziffern abgefragt werden, bestimmt die Bank nach dem Zufallsprinzip.

Ist z. B. der Code von Ben 235793 und beim Anmelden öffnet sich folgendes Fenster,



Abbildung

so muss Ben die Ziffern 2 und 7 eingeben. Will Anna nun den gesamten 6-stelligen Code stehlen, muss sie mehrere Male beim Einloggen „zuschauen“. Zu diesem Zweck installiert sie eine Schadsoftware auf Bens Computer, die ihr bei jedem Zuschauen die Beobachtung der beiden eingegebenen Ziffern und ihrer Position ermöglicht.

Name: ____________________

a) Die Matrix U beschreibt den Prozess aus Annas Sicht von anfangs null bekannten Ziffern (Zustand z_0) bis hin zu sechs bekannten Ziffern (Zustand z_6). Dabei beschreibt z_i den Zustand mit i bekannten Ziffern (i = 0, 2, 3, 4, 5, 6). Der Zustand z_1 kann nicht eintreten, da nach dem ersten „Zuschauen" sofort zwei Ziffern bekannt sind.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} \text{von} \quad z_0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{array} \quad \text{nach} \\
U = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{15} & \frac{3}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{15} & \frac{9}{15} & \frac{6}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{15} & \frac{8}{15} & \frac{10}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} z_0 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{array}
\end{array}$$

(1) *Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.*

(2) Betrachten Sie nun die zweite Spalte der Matrix U.

Erklären Sie im Sachzusammenhang die Einträge mit dem Wert Null in dieser Spalte.

Leiten Sie die von Null verschiedenen Werte in dieser Spalte her.

(5 + 6 Punkte)

b) Ben meldet sich jeden Monat fünfmal beim Onlinebanking an.

(1) *Bestimmen Sie* $U^2 \cdot \vec{s}$ *mit* $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach einem Monat den Code vollständig kennt, wenn sie vorher keine Ziffer des Codes kannte.*

(3) *Ermitteln Sie die Anzahl der Anmeldevorgänge, die Anna mindestens beobachten muss, um den Code mit mindestens* 99%*iger Wahrscheinlichkeit vollständig zu kennen.*

(4 + 3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Betrachtet wird ein anderer stochastischer Prozess, der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$ beschrieben wird.

(1) *Erklären Sie die Bedeutung für den stochastischen Prozess, wenn ein Diagonalelement den Wert* 1 *besitzt.*

(2) *Ermitteln Sie jeweils, welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung sich der durch A beschriebene Prozess bei Verwendung der Startverteilungen*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}5 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$ *auf lange Sicht nähert.*

(3) *Beurteilen Sie nun ohne weitere Rechnung folgende Aussage*:
Auf lange Sicht gibt es für jeden stochastischen Prozess genau eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung, die unabhängig von der Startverteilung ist.

(2 + 5 + 2 Punkte)

d) Eine Bank geht nach bisherigen Erfahrungen von einem Risiko von $p = 0{,}001$ aus, dass ein Konto bei der Anmeldung zum Onlinebanking angegriffen wird. Um diese Vermutung zu kontrollieren, werden 25000 Anmeldevorgänge genau untersucht.

(1) *Erläutern Sie, welche Annahmen getroffen werden müssen, um diese Vorgehensweise im Folgenden mithilfe einer Binomialverteilung zu modellieren.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als* 25 *Angriffe erfolgen.*

Falls mindestens 35 Angriffe registriert werden, geht man von einem Anwachsen des Risikos für einen Angriff aus.

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Annahme getroffen wird, wenn das Risiko für einen Angriff $p = 0{,}00095$ beträgt.*

(3 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

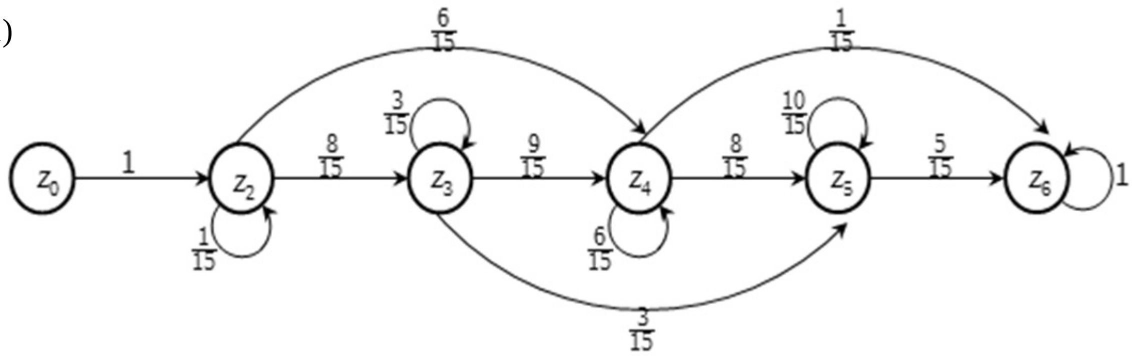
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

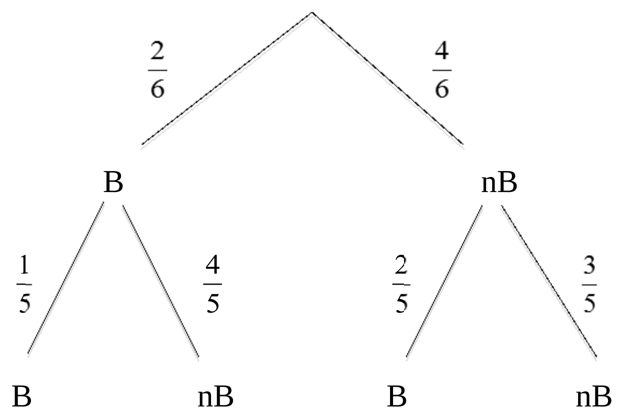
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1)



(2) Ausgehend vom Zustand z_2 (d. h., 2 Ziffern des Codes sind bereits bekannt) kann Anna beim nächsten Zuschauen keine neue Ziffer (sie verbleibt in z_2), eine neue Ziffer (Wechsel zu z_3) oder zwei neue Ziffern (Wechsel zu z_4) erfahren. Alle weiteren Übergänge sind unmöglich, d. h., sie treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 ein. Daher stehen in der ersten, fünften und letzten Zeile der zweiten Spalte Nullen.
Berechnung der anderen Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte durch Betrachtung eines zweistufigen Baumdiagramms, ausgehend von bereits zwei bekannten Ziffern:



B: Bekannte Ziffer erscheint
nB: Nicht bekannte Ziffer erscheint

Es ergeben sich folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

$P(z_2 \to z_2) = P(B,B) = 1/15.$

$P(z_2 \to z_3) = P(B,nB \text{ oder } nB,B) = 8/15.$

$P(z_2 \to z_4) = P(nB,nB) = 6/15.$

[Alternativer Lösungsweg: Betrachtung der möglichen 15 Stellenkombinationen im Code (Stellen 1.2., 2.3., ..., 5.6.) und Abzählen der Möglichkeiten, die zum jeweiligen Zustand führen.]

Teilaufgabe b)

(1)

$$U^2 \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{15} \\ \frac{8}{15} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0667 \\ 0,5333 \\ 0,4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach zweimaligem Zuschauen – dieser Prozess wird durch U^2 beschrieben, der Anfangszustand (keine Ziffer ist bekannt) durch den Zustandsvektor $\vec{s}$ – kennt Anna zwei, drei oder maximal vier Ziffern des Codes. Sie kennt mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,07 genau zwei Ziffern, mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,53 genau drei Ziffern und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 genau vier Ziffern des Codes.

(2) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für den Zustand z_6 nach fünfmaligem Zuschau-Prozess ausgehend vom Zustand z_0.

Mit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $U^5 \cdot \vec{x}_0 = U^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0000 \\ 0,0063 \\ 0,1345 \\ 0,5020 \\ 0,3571 \end{pmatrix}.$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,36 kennt Anna nach fünfmaligem Zuschauen den Code vollständig.

(3) Mithilfe des Taschenrechners kann folgende Gleichung numerisch untersucht werden:

$\vec{x}_n = U^n \cdot \vec{x}_0$.

Für n = 15 gilt: $\vec{x}_{15} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0137 \\ 0{,}9863 \end{pmatrix}$ und für n = 16 gilt: $\vec{x}_{16} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0091 \\ 0{,}9909 \end{pmatrix}$.

Anna muss den Anmeldevorgang mindestens 16-mal beobachten, um den Code mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit vollständig zu kennen.

Teilaufgabe c)

(1) Wenn ein Diagonalelement in der k-ten Spalte und Zeile den Wert 1 besitzt, bedeutet dies, dass der Prozess mit Sicherheit (Wahrscheinlichkeit = 1) in diesem Zustand z_k verbleibt, wenn dieser einmal erreicht ist.

(2) Es nähert sich

$A^{30} \cdot \overrightarrow{v_1} \approx A^{31} \cdot \overrightarrow{v_1} \approx \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0 \\ 0{,}81 \end{pmatrix}$ der sich stabilisierenden Verteilung $\begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0 \\ 0{,}81 \end{pmatrix}$ und

$A^{30} \cdot \overrightarrow{v_2} \approx A^{31} \cdot \overrightarrow{v_2} \approx \begin{pmatrix} 0{,}54 \\ 0 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$ der sich stabilisierenden Verteilung $\begin{pmatrix} 0{,}54 \\ 0 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}$.

(3) Die Ergebnisse in (2) zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht bei dem durch A beschriebenen Prozess abhängig von der Startverteilung ist. Damit kann es nicht für jeden stochastischen Prozess eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung geben, die unabhängig von der Startverteilung ist. Die Aussage ist also falsch.

Teilaufgabe d)

(1) Jeder Anmeldevorgang wird angegriffen (mit $p = 0{,}001$) oder nicht, kann also als Bernoulli-Versuch betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Angriff sind jeweils unabhängig voneinander und immer gleich. [Die Registrierung von 25000 Anmeldevorgängen kann als Bernoulli-Kette der Länge $n = 25000$ modelliert werden.]

(2) Zufallsgröße X: Anzahl der Angriffe $n = 25000$, $p = 0{,}001$
$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) \approx 1 - 0{,}553 = 0{,}447$.

(3) $P_{p=0{,}00095}(X \geq 35) = 1 - P_{p=0{,}00095}(X \leq 34) \approx 1 - 0{,}982 = 0{,}018$.
Die Wahrscheinlichkeit für die Annahme, dass das Risiko für einen Angriff gestiegen ist, obwohl sich in Wirklichkeit das Angriffsrisiko auf $p = 0{,}00095$ reduziert hat, beträgt 1,8 %.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet das zugehörige Übergangsdiagramm.	5			
2	(2) erklärt im Sachzusammenhang die Einträge mit dem Wert Null in der zweiten Spalte der Matrix U.	2			
3	(2) leitet die von Null verschiedenen Werte der zweiten Spalte her.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt $U^2 \cdot \vec{s}$.	2			
2	(1) interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
4	(3) ermittelt die gesuchte Anzahl der Anmeldevorgänge.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt die Bedeutung des Diagonalelementes 1.	2			
2	(2) ermittelt jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf lange Sicht für die gegebenen Startvektoren.	5			
3	(3) beurteilt die gegebene Aussage.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert die Annahmen der Modellierung.	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

a) Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %. Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

(1) *Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.*

(2) *Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“

B: „Das Testergebnis ist negativ.“

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.*

(4 + 4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Im Rahmen einer Studie sollen aus der Bevölkerung Deutschlands 20 000 Personen zufällig ausgewählt werden. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt und gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

(1) *Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

E_1: *Bei genau* 190 *Personen liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.*

E_2: *Bei mehr als* 19 800 *Personen liegt* ***keine*** *Glutenunverträglichkeit vor.*

E_3: *Mindestens* 240*, aber höchstens* 2 400 *Personen besitzen eine Glutenunverträglichkeit.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als* 10 % *vom Erwartungswert von X abweicht.*

(6 + 5 Punkte)

c) Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem eine Substanz als Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen zu gering, so ist dieser unbrauchbar.

Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

(1) Wenn 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, ist eine Verbesserung des Herstellungsverfahrens entsprechend der Zielvorgabe noch nicht erforderlich.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Hersteller sich aufgrund einer Stichprobe und seiner Entscheidungsregel in diesem Fall dennoch um eine Verbesserung des Verfahrens bemüht.

(2) Durch einen Maschinendefekt sind statt 10 % nun 18 % der Teststreifen unbrauchbar.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Defekt bei Beibehaltung der Entscheidungsregel fälschlicherweise nicht bemerkt wird.

(4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

d) Im Rahmen der Qualitätskontrolle wird u. a. die Indikatormenge auf den einzelnen Teststreifen gemessen. Tabelle 1 zeigt die absoluten Häufigkeiten der aufgetretenen Mengen bei einer Stichprobe von 100 Teststreifen.

Indikatormenge in mg	15	16	17	18	19	20
Anzahl der Teststreifen	4	9	10	48	18	11

Tabelle 1

(1) *Bestimmen Sie für diese Häufigkeitsverteilung das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.*

(2) Bei einer früheren Qualitätskontrolle lagen das arithmetische Mittel bei 18 mg und die Standardabweichung bei 4,3 mg.
Erläutern Sie unter Berücksichtigung Ihrer Ergebnisse aus (1)*, welche Rückschlüsse sich aus diesen Kenngrößen auf die Qualitätsentwicklung des Produktionsverfahrens ziehen lassen.*

(6 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

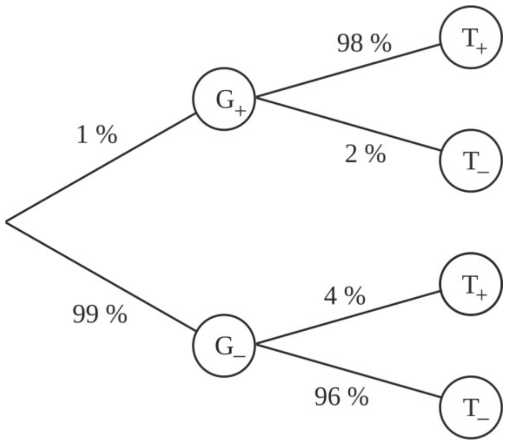
Teilaufgabe a)

(1) G_+: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“

G_-: „Bei der Person liegt keine Glutenunverträglichkeit vor.“

T_+: „Das Testergebnis ist positiv.“

T_-: „Das Testergebnis ist negativ.“



(2) $P(A) = P(G_+ \wedge T_+) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098 = 0{,}98\,\%$.

$P(B) = P(G_+ \wedge T_-) + P(G_- \wedge T_-) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 0{,}9506 = 95{,}06\,\%$.

(3) $P(T_+) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9506 = 0{,}0494 = 4{,}94\,\%$.

$P(G_+ \wedge T_+) = P(A) = 0{,}0098 = 0{,}98\,\%$.

$$P_{T_+}(G_+) = \frac{P(G_+ \wedge T_+)}{P(T_+)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0494} \approx 0{,}1984 = 19{,}84\,\%.$$

Teilaufgabe b)

(1) $P(E_1) = P_{20000;0,01}(X = 190) \approx 0,0225 = 2,25\,\%$.

$P(E_2) = P_{20000;0,99}(X > 19800) = P_{20000;0,99}(X \geq 19801) \approx 0,4905 = 49,05\,\%$.

$P(E_3) = P_{20000;0,01}(240 \leq X \leq 2400) \approx 0,0031 = 0,31\,\%$.

(2) X ist B(20 000; 0,01)-verteilt. $E(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0,01 = 200$.

$1 - P(0,9 \cdot 200 \leq X \leq 1,1 \cdot 200) \approx 0,1450 = 14,50\,\%$.

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Teststreifen in der Stichprobe, die unbrauchbar sind. Y ist B(100; 0,1)-verteilt.

$P(16 \leq Y \leq 100) \approx 0,0399 = 3,99\,\%$.

(2) Y ist nun B(100; 0,18)-verteilt.

$P(Y < 16) = P(Y \leq 15) \approx 0,2630 = 26,30\,\%$.

Teilaufgabe d)

(1) $\bar{x} = (4 \cdot 15 + 9 \cdot 16 + 10 \cdot 17 + 48 \cdot 18 + 18 \cdot 19 + 11 \cdot 20) : 100 = 18\,[\text{mg}]$.

$$s = \sqrt{\frac{(18-15)^2 \cdot 4 + (18-16)^2 \cdot 9 + (18-17)^2 \cdot 10 + (18-18)^2 \cdot 48 + (18-19)^2 \cdot 18 + (18-20)^2 \cdot 11}{100}}$$

$= 1,2\,[\text{mg}]$.

(2) Das arithmetische Mittel ist konstant geblieben, d. h., die durchschnittliche Indikatormenge pro Teststreifen hat sich nicht verändert.

Eine deutliche Veränderung gibt es bei der Standardabweichung, die von 4,3 mg auf 1,2 mg gesunken ist. Eine geringere Streuung bedeutet, dass die Indikatormengen auf den Teststreifen weniger stark von der durchschnittlichen Menge abweichen als vorher. Das Produktionsverfahren ist somit präziser und somit qualitativ besser geworden.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ___________________________________

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) erstellt zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.	4			
2	(2) ermittelt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	4			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit von E_1.	2			
2	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit von E_2.	2			
3	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit von E_3.	2			
4	(2) bestimmt den Erwartungswert.	2			
5	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt das arithmetische Mittel der gegebenen Häufigkeitsverteilung.	3			
2	(1) bestimmt die Standardabweichung zu der gegebenen Häufigkeitsverteilung.	3			
3	(2) erläutert unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus (1), welche Rückschlüsse sich aus diesen Kenngrößen auf die Qualitätsentwicklung des Produktionsverfahrens ziehen lassen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**104**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	104 – 99
sehr gut	14	98 – 94
sehr gut minus	13	93 – 89
gut plus	12	88 – 84
gut	11	83 – 78
gut minus	10	77 – 73
befriedigend plus	9	72 – 68
befriedigend	8	67 – 63
befriedigend minus	7	62 – 58
ausreichend plus	6	57 – 52
ausreichend	5	51 – 47
ausreichend minus	4	46 – 42
mangelhaft plus	3	41 – 35
mangelhaft	2	34 – 29
mangelhaft minus	1	28 – 21
ungenügend	0	20 – 0