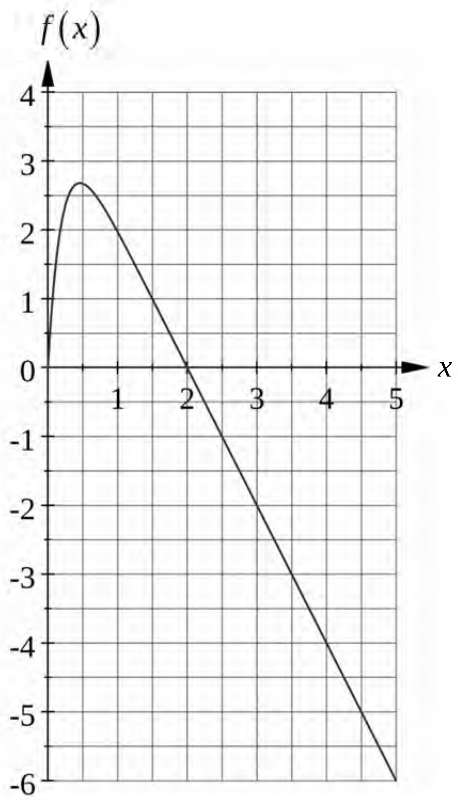
Name: ____________________

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = 4 - 2x - 4 \cdot e^{-5x}$, $x \in \mathbb{R}$.



Abbildung

a) (1) *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse.*

(2) *Bestimmen Sie die lokale Maximalstelle* x_E *der Funktion f.*

[Zur Kontrolle: $f'(x) = -2 + 20 \cdot e^{-5x}$; $x_E = 0{,}2 \cdot \ln(10)$]

(2 + 9 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' streng monoton fallend ist.*

(2) *Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.*

(3) *Begründen Sie nun, dass die Funktion f höchstens zwei Nullstellen besitzt.*

(3 + 4 + 3 Punkte)

c) g sei die Gerade mit der Gleichung $g(x) = 4 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) *Zeichnen Sie die Gerade g in die Abbildung auf Seite 1 ein.*

(2) *Zeigen Sie:*
Für alle $x \in \mathbb{R}$ verläuft der Graph der Funktion f unterhalb der Geraden g.

(3) *Begründen Sie mit Hilfe von c) (2):*
Wenn x_0 eine Nullstelle der Funktion f ist, dann gilt $x_0 < 2$.

(4) Zwischen der Geraden g und dem Graphen der Funktion f ist im Intervall $[0; 1]$ eine Fläche eingeschlossen.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

(2 + 3 + 4 + 5 Punkte)

Name: ____________________

d) Im Rahmen eines schulischen Projekts untersucht ein Schüler, wie stark ein Ball aus Styropor beim Wurf von der Luft abgebremst wird.
Dazu lehnt er sich aus einem Fenster der Schule und wirft den Ball senkrecht nach oben. Dabei zeichnet eine Kamera die Bewegung des Balles auf, bis dieser unten auf den Boden trifft. Er stellt fest, dass die Bewegung des Balles für $0 \le x \le 5$ durch die oben gegebene Funktion f modelliert werden kann. Dabei wird x als Maßzahl der **Zeit** zur Einheit 1 s und $f(x)$ als Maßzahl der **Höhe** des Balles zur Einheit 1 m aufgefasst.

Die Höhe des Balles bezieht sich auf die Abwurfhöhe $f(0) = 0$ [m] zur Zeit $x = 0$ [s].

(1) Nach 5 s trifft der Ball auf den Boden.

Berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Boden der Ball abgeworfen wurde.

(2) *Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balles über dem Boden.*

(3) *Begründen Sie durch den Sachzusammenhang, dass die Funktion f im Zeitintervall $[0; 5]$ genau zwei Nullstellen besitzt.*

Geben Sie diese Nullstellen auf zwei Nachkommastellen genau an.

(4) *Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion f' im Zeitintervall $[0; 5]$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.*

(2 + 3 + 5 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Es ist $f(0)=0$. Daher schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im Punkt $S_y(0\,|\,0)$.

(2) Man berechnet $f'(x)=-2+20\cdot e^{-5x}$. Hieraus ergibt sich $f''(x)=-100\cdot e^{-5x}$. Notwendig für eine Extremstelle x_E ist $f'(x_E)=0.$ Nun gilt:

$-2+20\cdot e^{-5x_E}=0 \Leftrightarrow e^{-5x_E}=0{,}1 \Leftrightarrow e^{5x_E}=10 \Leftrightarrow 5x_E=\ln(10) \Leftrightarrow x_E=0{,}2\cdot\ln(10)$.

Wegen $f''(x_E)=-10<0$ wird an der Stelle $x_E=0{,}2\cdot\ln(10)$ ein lokales Maximum angenommen.

Teilaufgabe b)

(1) Wegen $f''(x)=-100\cdot e^{-5x}<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Funktion f' streng monoton fallend.

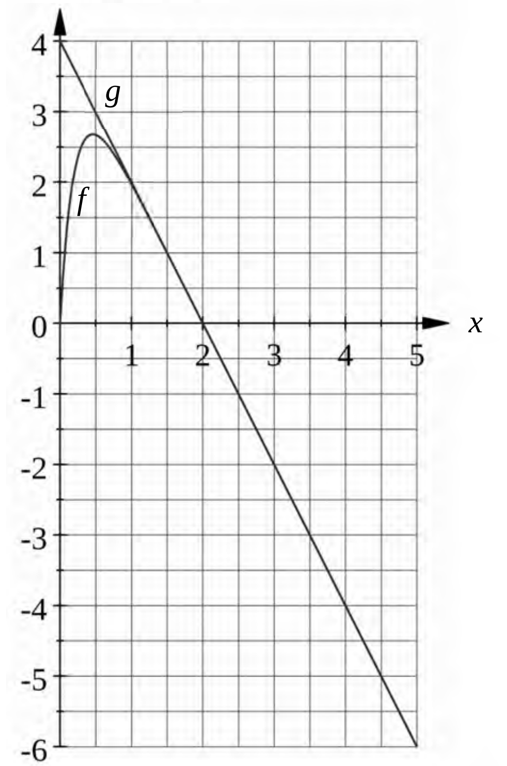
(2) Da die Funktion f' streng monoton fallend ist und $f'(x_E)=0$ gilt (x_E ist die Extremstelle von f aus a) (2)), erhält man: Für $x<x_E$ ist $f'(x)>0$ und für $x>x_E$ ist $f'(x)<0$.

[Alternativ kann man mit $f'(x)=-2+20\cdot e^{-5x}$ argumentieren.] Somit ist die Funktion f für $x<x_E$ streng monoton steigend und für $x>x_E$ streng monoton fallend.

(3) Jede streng monotone Funktion besitzt höchstens eine Nullstelle. Da die Funktion f zwei Monotoniebereiche hat, besitzt sie höchstens zwei Nullstellen.

Teilaufgabe c)

(1) $f(x)$, $g(x)$



Abbildung

(2) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $g(x) > f(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow 4 \cdot e^{-5x} > 0$. Hieraus folgt die Behauptung.

(3) Nach c) (2) ist $f(x_0) < g(x_0)$. Wegen $f(x_0) = 0$ erhält man $g(x_0) = 4 - 2x_0 > 0$. Also ist $x_0 < 2$.

[Alternative: Nach c) (2) verläuft der Graph der Funktion *f* unterhalb der Geraden *g*. Da *g* fällt und die *x*-Achse an der Stelle $x_1 = 2$ schneidet, folgt die Behauptung.]

(4) Es sei A der Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche. Wegen c) (2) erhält man $A = \int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_0^1 4 \cdot e^{-5x}\, dx = \left[-0,8 \cdot e^{-5x}\right]_0^1 = 0,8 - 0,8 \cdot e^{-5} \approx 0,8$ [FE].

Teilaufgabe d)

(1) Wegen $f(5) = -6 - 4 \cdot e^{-25} \approx -6$ wurde der Ball etwa 6 m über dem Boden abgeworfen.

(2) Da $f(0) = 0$ und $f(5) = -6 - 4 \cdot e^{-25} \approx -6$, hat der Ball bei x_E die maximale Höhe.

Die maximale Höhe des Balles über dem Boden beträgt

$f(x_E) + |f(5)| = 3{,}6 - 0{,}4 \cdot \ln(10) + 6 + 4 \cdot e^{-25} \approx 8{,}68$ [m].

(3) Der Ball startet auf der Höhe des Fensters von ca. 6 m über dem Boden und muss diese Höhe dann beim Fallen auf den Boden wieder passieren.

Offensichtlich ist $f(0) = 0$. Damit ist $x_{01} = 0{,}00$ eine Nullstelle der Funktion f.

Wegen $f(2) \approx -0{,}00018$, $f(1{,}9) \approx 0{,}2$, $f(1{,}99) \approx 0{,}02$, $f(1{,}999) \approx 0{,}002$ ist $x_{02} \approx 2{,}00$ die zweite Nullstelle der Funktion f.

(4) Da die Funktion f' streng monoton fallend ist, liegen die Extrema am Rand des Zeitintervalls und es ist $f'(0) = 18$ das Maximum und $f'(5) = -2 + 20 \cdot e^{-25} \approx -2$ das Minimum der Funktion f' im Zeitintervall $[0; 5]$.

Interpretation: Der Ball kann Geschwindigkeiten zwischen 18 m/s und –2 m/s annehmen. Dabei bedeutet eine negative Geschwindigkeit, dass der Ball fällt.

[Alternative: Die maximale Steiggeschwindigkeit beträgt 18 [m/s] und die maximale Sinkgeschwindigkeit 2 [m/s]].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y-Achse.	2			
2	(2) berechnet $f'(x)$ und $f''(x)$.	4			
3	(2) bestimmt die lokale Maximalstelle der Funktion f.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die Funktion f' streng monoton fallend ist.	3			
2	(2) bestimmt das Monotonieverhalten der Funktion f.	4			
3	(3) begründet, dass die Funktion f höchstens zwei Nullstellen besitzt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeichnet die Gerade g in die *Abbildung* ein.	2			
2	(2) zeigt die Aussage aus der Aufgabenstellung.	3			
3	(3) begründet die Aussage aus der Aufgabenstellung.	4			
4	(4) berechnet den Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet, in welcher Höhe über dem Boden der Ball abgeworfen wurde.	2			
2	(2) bestimmt die maximale Höhe des Balles über dem Boden.	3			
3	(3) begründet durch den Sachzusammenhang die Aussage aus der Aufgabenstellung.	2			
4	(3) gibt die Nullstellen von f im Zeitintervall $[0;5]$ auf zwei Nachkommastellen genau an.	3			
5	(4) berechnet das Maximum und das Minimum der Funktion f' im Zeitintervall $[0;5]$.	3			
6	(4) interpretiert seine Ergebnisse im Sachzusammenhang.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

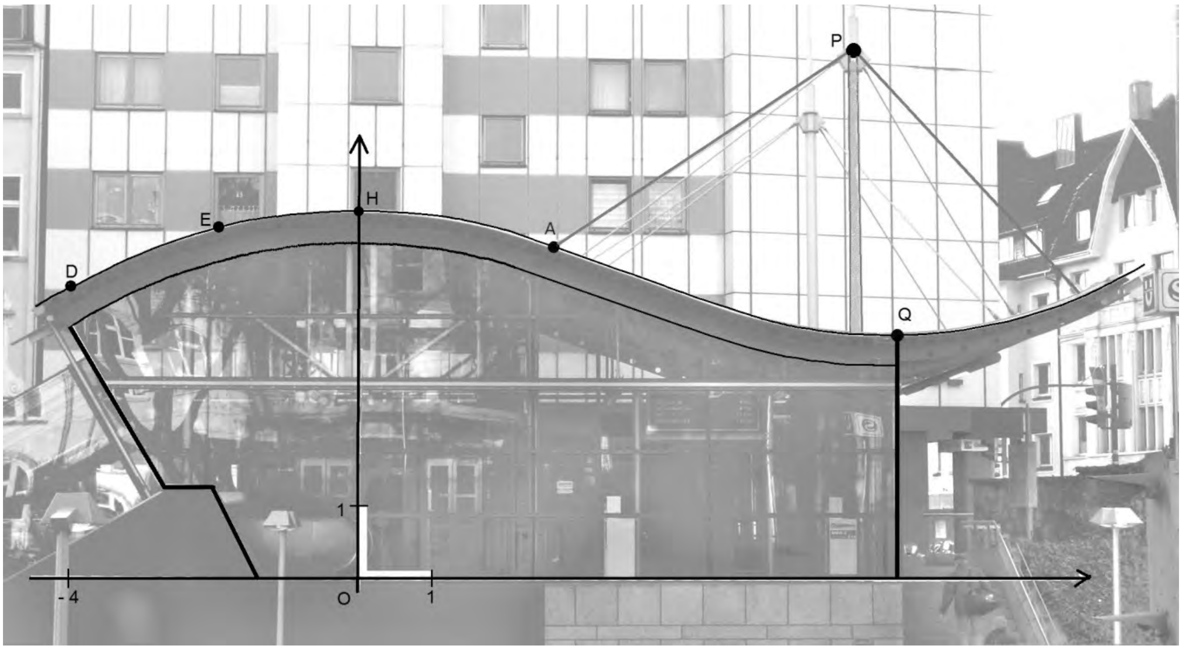
Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:



Abbildung

Die Abbildung zeigt das Eingangsgebäude zu einer U-Bahn-Haltestelle. Auf dem Foto schaut man frontal auf eine ebene Glasfläche, die sich unter dem geschwungenen Dach befindet.

Eine Längeneinheit in dem eingezeichneten Koordinatensystem entspricht 1 m.

Der höchste Punkt der Dachoberkante befindet sich in diesem Koordinatensystem bei $H(0\,|\,5,0)$ und der tiefste Punkt bei $Q(7,3\,|\,3,3)$. Auch die Punkte $D(-4\,|\,4)$ und $E(-2\,|\,4,75)$ liegen auf der Dachoberkante.

Name: _____________________

a) Die Profillinie der Dachoberkante hat eine geschwungene Form, die durch eine ganzrationale Funktion modelliert werden soll.

(1) Die Profillinie hat im Bereich $-4 \le x \le 4$ näherungsweise die Form einer Parabel 2. Grades.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parabel mit dem Hochpunkt H, die durch den Punkt D verläuft.

Prüfen Sie, ob der Punkt E auf dieser Parabel liegt.

[Zur Kontrolle: $p(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$]

(2) *Begründen Sie anhand der Abbildung, warum eine ganzrationale Funktion, die zur Modellierung der gesamten Profillinie der Dachoberkante geeignet sein könnte, mindestens 3. Grades sein muss.*

(5 + 3 Punkte)

Im Folgenden wird zur Modellierung der Dachoberkante für $-4{,}5 \le x \le 10{,}5$ eine ganzrationale Funktion 4. Grades verwendet, und zwar die auf *IR* definierte Funktion f mit

$f(x) = 0{,}0004 \cdot x^4 + 0{,}0016 \cdot x^3 - 0{,}063 \cdot x^2 + 5$.

b) (1) *Weisen Sie nach, dass der Punkt H auch ein lokaler Hochpunkt des Graphen von f ist.*

(2) *Bestimmen Sie im Modellierungsbereich den Tiefpunkt T des Graphen von f .*

Geben Sie an, um wieviel Prozent jede Koordinate von T von der entsprechenden Koordinate von Q abweicht.

[Kontrollergebnis: $T(7{,}5\,|\,3{,}4)$, y-Wert gerundet]

(3) Der Punkt A aus der Abbildung hat die x-Koordinate 2,7.

Untersuchen Sie im Modell der Funktion f , ob an dieser Stelle die Profillinie zwischen H und T das stärkste Gefälle hat.

(4 + 8 + 5 Punkte)

Name: ____________________

c) Oberhalb des Daches sind geradlinig verlaufende Stahlseile angebracht. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass das Stahlseil von $A(2,7\,|\,f(2,7))$ nach $P(6,7\,|\,7,2)$ verläuft.

(1) *Berechnen Sie die Länge des Stahlseils von A nach P.*

(2) Das Stahlseil wird im Bereich $2,7 \le x \le 6,7$ durch eine Gerade g modelliert.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g und berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Gerade g in A mit der Horizontalen einschließt.

(3) Ein weiteres Seil soll von P nach E gespannt werden.
Überprüfen Sie, ob es in E tangential zur Dachoberkante verlaufen wird.

(4 + 6 + 4 Punkte)

d) Das Eingangsgebäude ist mit Glas verkleidet. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass es sich bei der in der Abbildung umrahmten Glasfläche um eine durchgehende ebene Fläche handelt, die nicht durch Rahmen und Streben unterbrochen wird.
Die eingezeichnete Oberkante der Glasfläche wird im Bereich $-4 \le x \le 7,3$ durch die auf *IR* definierte Funktion h mit $h(x) = 0,0004 \cdot x^4 + 0,0016 \cdot x^3 - 0,063 \cdot x^2 + 4,5$ modelliert.

(1) *Berechnen Sie den Inhalt der Glasfläche von der y-Achse bis zur eingezeichneten Kante durch den Punkt Q in der Ansicht aus der Abbildung.*

(2) Für die Glasfläche links von der y-Achse ist der Rand der zu berechnenden Glasfläche in der Abbildung nachgezeichnet.

Beschreiben Sie eine mögliche Lösungsidee zur Bestimmung des Inhalts der umrahmten Glasfläche links von der y-Achse. Geben Sie dabei alle nötigen Ansätze an, die Berechnung konkreter Werte wird hingegen nicht erwartet.

(6 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Parabel muss nach unten geöffnet sein und den Scheitelpunkt in $H(0\,|\,5)$ haben.

Ansatz: $y = a \cdot x^2 + 5$. Einsetzen der Koordinaten von $D(-4\,|\,4)$ liefert:

$4 = a \cdot 16 + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{16}$, also die Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{16} \cdot x^2 + 5$.

Zu $x = -2$ gehört der Funktionswert $y = 4{,}75$, in Übereinstimmung mit der *y*-Koordinate von *E*.

(2) Die Profillinie hat einen lokalen Hoch- und einen lokalen Tiefpunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.

[Mögliche Alternativen in der Argumentation:

- Die Profillinie wechselt von einer Rechtskrümmung in eine Linkskrümmung, hat also einen Wendepunkt. Dies ist bei quadratischen oder linearen Funktionen nicht möglich.
- Bei einer ganzrationalen Funktion kann erst ab dem 3. Grad die 1. Ableitung mindestens zwei Nullstellen haben (notwendige Bedingung für die zwei Extremstellen der Funktion).]

Teilaufgabe b)

(1) $f(0) = 5$. (Der Funktionswert stimmt mit der *y*-Koordinate von *H* überein.)

$f'(x) = 0{,}0016 \cdot x^3 + 0{,}0048 \cdot x^2 - 0{,}126 \cdot x$.

$f''(x) = 0{,}0048 \cdot x^2 + 0{,}0096 \cdot x - 0{,}126$.

Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, liegt an der Stelle $x = 0$ tatsächlich ein lokales Maximum von *f* vor, *H* ist also lokaler Hochpunkt des Graphen von *f*.

(2) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 7{,}5 \vee x_3 = -10{,}5$.

x_1 ist Maximalstelle, x_3 liegt außerhalb des für die Modellierung relevanten Bereiches.

Da $f(7{,}5) \approx 3{,}4 < f(-4{,}5)$ und $f(7{,}5) < f(10{,}5)$, ist $T(7{,}5\,|\,3{,}4)$ der gesuchte Tiefpunkt.

Die x-Koordinate von T weicht um $\frac{7{,}5-7{,}3}{7{,}3} \approx 2{,}7\,\%$ von der x-Koordinate von Q ab.

Die Abweichung bei der y-Koordinate beträgt $\frac{3{,}4-3{,}3}{3{,}3} \approx 3{,}0\,\%$.

(3) Die Profillinie hat das stärkste Gefälle in einem Wendepunkt zwischen dem Hochpunkt H und dem Tiefpunkt T des Graphen von f.

$f''(x_w) = 0$ hat für $x \geq 0$ die einzige Lösung $x_w = -1 + \sqrt{27{,}25} \approx 4{,}22 \neq 2{,}7$. Also ist A nicht der Punkt mit dem größten Gefälle.

[Alternativ: $f''(2{,}7) \neq 0$, also liegt bei 2,7 kein Wendepunkt vor.]

[Ebenfalls zulässig ist ein Vergleich von $f'(2{,}7)$ mit z. B. $f'(3)$.]

Teilaufgabe c)

(1) Die Länge des Stahlseils entspricht dem Abstand der Punkte $P(6{,}7\,|\,7{,}2)$ und $A(2{,}7\,|\,f(2{,}7))$, wobei $f(2{,}7) \approx 4{,}593$. Den Abstand berechnet man mit dem Satz des Pythagoras: $\left|\overline{AP}\right| = \sqrt{(6{,}7-2{,}7)^2 + (7{,}2-f(2{,}7))^2} \approx 4{,}77$.

Das Stahlseil hat eine Länge von ca. 4,77 m.

(2) Die Steigung der Geraden beträgt $m = \frac{7{,}2-f(2{,}7)}{6{,}7-2{,}7} \approx \frac{7{,}2-4{,}593}{4} \approx 0{,}652$.

Mit $y = f(2{,}7) + m \cdot (x-2{,}7)$ und $f(2{,}7) \approx 4{,}593$ erhält man als Geradengleichung von g: $y = 0{,}652 \cdot x + 2{,}833$.

Mit $m = \tan(\alpha)$ folgt: $\tan(\alpha) \approx 0{,}652 \Rightarrow \alpha \approx 33{,}1°$. g schließt mit der Horizontalen einen Winkel von ungefähr 33,1° ein.

(3) Die Steigung der Geraden durch E und P beträgt $\frac{7{,}2-4{,}75}{6{,}7+2} \approx 0{,}28$, für die Steigung der Tangente an den Graphen von f in E erhält man $f'(-2) \approx 0{,}26$.

Das Seil wird also nicht exakt tangential zur Dachoberkante verlaufen.

[Akzeptiert wird auch z. B.: „nahezu tangential“ oder „nicht tangential“.]

Teilaufgabe d)

(1) Der Flächeninhalt wird durch Integration ermittelt:

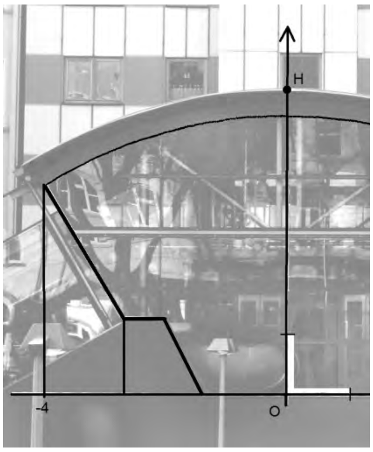
$$\int_0^{7,3} h(x)\,dx = \left[\frac{0,0004}{5}\cdot x^5 + \frac{0,0016}{4}\cdot x^4 - \frac{0,063}{3}\cdot x^3 + 4,5\cdot x\right]_0^{7,3}$$

$$= 0,00008\cdot 7,3^5 + 0,0004\cdot 7,3^4 - 0,021\cdot 7,3^3 + 4,5\cdot 7,3 \approx 27,475.$$

Die Glasfläche ist etwa $27,475\,\mathrm{m}^2$ groß.

(2) Als Lösung wird die Angabe einer geeigneten Ergänzung und Zerlegung mit Angabe des für die Berechnung erforderlichen Integrals und der Formeln für die Teilflächen erwartet.

Der folgende Bildausschnitt zeigt eine mögliche Zerlegung der ergänzten Fläche:



Mit dem Integral $\int_{-4}^{0} h(x)\,\mathrm{d}x$ wird der Flächeninhalt zwischen Glasoberkante und x-Achse berechnet. Davon müssen die Flächeninhalte der beiden eingezeichneten Trapeze subtrahiert werden. (Flächeninhalt eines Trapezes: $A = \frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$.)

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt eine Gleichung der Parabel und prüft, ob der Punkt E auf der Parabel liegt.	5			
2	(2) begründet anhand der Abbildung, warum eine ganzrationale Funktion zur Modellierung mindestens 3. Grades sein muss.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass H ein lokaler Hochpunkt des Graphen von f ist.	4			
2	(2) bestimmt den Tiefpunkt T des Graphen von f.	5			
3	(2) gibt die prozentuale Abweichung der Koordinaten von T von denen von Q an.	3			
4	(3) untersucht, ob der Graph von f zwischen H und T das stärkste Gefälle an der Stelle $x = 2{,}7$ hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Länge des Stahlseils von A nach P.	4			
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Geraden g.	4			
3	(2) berechnet die Größe des Winkels zwischen der Geraden g und der Horizontalen.	2			
4	(3) überprüft, ob das Seil in E tangential zur Dachoberkante verlaufen wird.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Inhalt der Glasfläche rechts von der y-Achse bis zur Kante durch den Punkt Q.	6			
2	(2) beschreibt eine mögliche Lösungsidee zur Bestimmung der Glasfläche links von der y-Achse.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

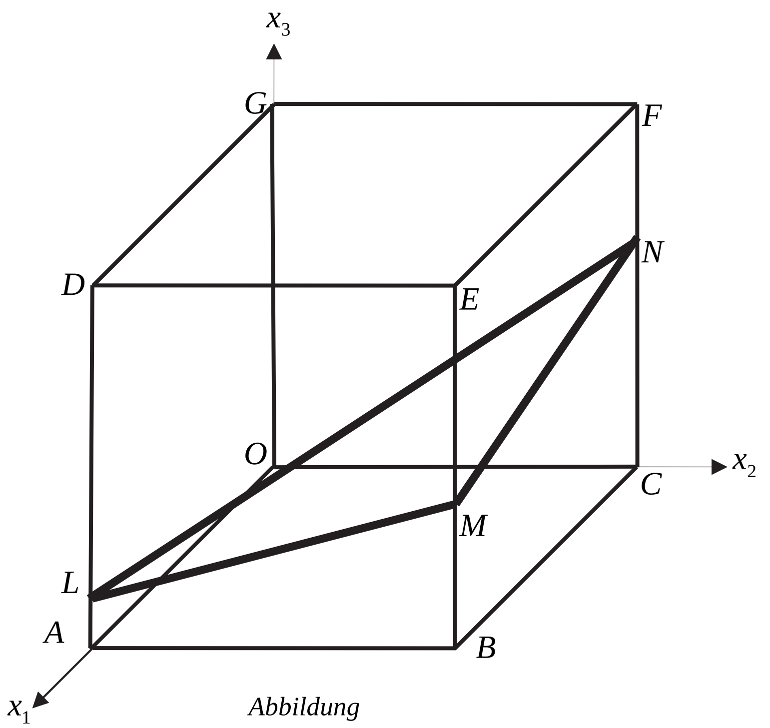
Name: ____________________

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(8|0|0)$, $B(8|8|0)$, $C(0|8|0)$, $D(8|0|8)$, $E(8|8|8)$, $F(0|8|8)$ und $G(0|0|8)$ Eckpunkte eines Würfels $OABCDEFG$. Außerdem sind die Punkte $L(8|0|1)$, $M(8|8|3)$ und $N(0|8|5)$ gegeben (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Name: ____________________

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN gleichschenklig ist.*

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck LMN nicht rechtwinklig ist.*

(3) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks LMN.*

[Zur Kontrolle: Der Flächeninhalt des Dreiecks *LMN* beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$ [FE].]

(4 + 4 + 5 Punkte)

b) (1) *Ermitteln Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene H, die die Punkte L, M und N enthält.*

[Mögliches Ergebnis für die Koordinatengleichung: $H : x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$.]

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g, die durch die Punkte* $P(11\,|\,-3\,|\,20)$ *und D festgelegt ist, und der Ebene H.*

[Zur Kontrolle: Der Schnittpunkt ist $S\left(\frac{58}{9}\,\middle|\,\frac{14}{9}\,\middle|\,\frac{16}{9}\right)$.]

(3) *Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene H senkrecht schneidet.*

(4) *Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide LMND.*

(7 + 7 + 5 + 5 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie den Schnittpunkt T der Ebene H mit der* x_3*-Achse.*

[Zur Kontrolle: $T(0\,|\,0\,|\,3)$]

(2) *Skizzieren Sie in der Abbildung das Schnittgebilde, das die Ebene H mit dem Würfel bildet.*

(3) *Zeigen Sie, dass das Schnittgebilde von Ebene und Würfel eine Raute ist.*

(4) *Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, mit der Sie prüfen können, ob der Punkt* $Q(2{,}5\,|\,1\,|\,2{,}75)$ *auf derselben Seite der Ebene H wie der Punkt D liegt.*

(3 + 3 + 3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Vektorielle Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameter- und Koordinatenform
   - Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Aus $\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt, dass $\left|\overrightarrow{LM}\right| = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8{,}25\,[\text{LE}]$

ist. Daher ist das Dreieck *LMN* gleichschenklig.

(2) Da $\left|\overline{LM}\right| = \left|\overline{MN}\right|$ ist, kann im Dreieck *LMN* ein rechter Winkel höchstens im Punkt *M* sein.

Da $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ gilt, ist das Dreieck *LMN* nicht rechtwinklig.

[Alternativ kann beispielsweise auch mit dem Satz des Pythagoras argumentiert werden.]

(3) Der Punkt $R(4\,|\,4\,|\,3)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{LN}$. Da das Dreieck *LMN* gleichschenklig ist, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{LN}\right| \cdot \left|\overline{RM}\right|$.

Aus $\overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt, dass $\left|\overrightarrow{LN}\right| = \sqrt{144} = 12\,[\text{LE}]$ und

$\left|\overrightarrow{RM}\right| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,[\text{LE}]$ ist.

$$A_{\Delta LMN} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \approx 33{,}94\,[\text{FE}].$$

Teilaufgabe b)

(1) Für eine Gleichung der Ebene H in Parameterform ergibt sich:

$$H: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r^* \cdot \overrightarrow{LM} + s^* \cdot \overrightarrow{LN} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ Es folgt:}$$

$$H: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; (r^*, s^*, r, s \in \mathbb{R})$$

$$\text{bzw. } \left| \begin{array}{l} x_1 = 8 \quad -2s \\ x_2 = \quad 4r + 2s \\ x_3 = 1 + \; r + \; s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 \quad = \; 8 \quad -2s \\ x_2 - 4x_3 = -4 \quad -2s \\ x_3 \quad = \; 1 + r + \; s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_2 - 4x_3 \quad = -4 \quad -2s \\ x_3 \quad = \; 1 + r + \; s \end{array} \right|.$$

Es ergibt sich als mögliche Koordinatenform:

$H: \quad x_1 - x_2 + 4x_3 = 12$.

(2) $g: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + t^* \cdot \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} \right)$ bzw. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $(t^*, t \in \mathbb{R})$.

$P(8+t \mid -t \mid 8+4t)\ (t \in \mathbb{R})$ ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden g. P ist genau dann Schnittpunkt von g und H, wenn gilt:

$$8 + t - (-t) + 4 \cdot (8 + 4t) = 12 \Leftrightarrow 18t + 40 = 12 \Leftrightarrow t = -\frac{14}{9}.$$

Eingesetzt in g erhält man den Schnittpunkt $S\left(\frac{58}{9} \middle| \frac{14}{9} \middle| \frac{16}{9} \right)$.

(3) Die Gerade g schneidet die Ebene H genau dann senkrecht, wenn ein Richtungsvektor von g zu zwei nicht-kollinearen Richtungsvektoren von H senkrecht steht.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist z. B. ein Richtungsvektor von g. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ist,

schneidet g die Ebene H senkrecht.

(4) Da die Gerade *g* die Ebene *H* senkrecht schneidet, gilt für die Höhe der Pyramide *LMND*:

$$h = \left|\overrightarrow{SD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 14/9 \\ -14/9 \\ 56/9 \end{pmatrix}\right| = \frac{14}{9}\cdot\sqrt{18} = \frac{14}{3}\cdot\sqrt{2}\ \text{[LE]}.$$

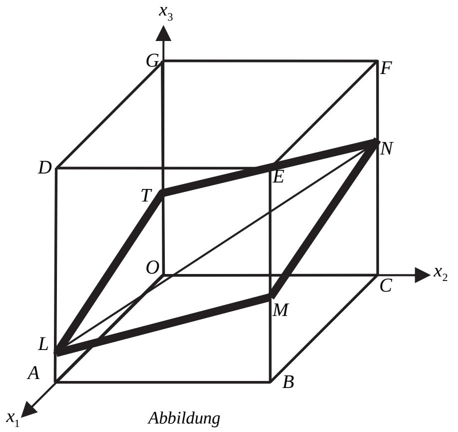
Für das Volumen der Pyramide *LMND* folgt mit a) (3):

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}A_{\Delta LMN}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 24\sqrt{2}\cdot\frac{14}{3}\sqrt{2} = \frac{224}{3} = 74{,}\overline{6}\ \text{[VE]}.$$

Teilaufgabe c)

(1) $T(x_1\,|\,x_2\,|\,x_3)$ ist genau dann der Schnittpunkt der x_3-Achse mit der Ebene *H*, wenn $x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \wedge x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$ gilt. Es folgt: $T(0\,|\,0\,|\,3)$.

(2)



Abbildung

[Hinweis: In Aufgabenteil c) (2) ist auch eine „rein“ grafische Lösung mit Parallelen vorstellbar.]

(3) Aus $\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (siehe auch a) (1), $\overrightarrow{NT} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{TL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ folgt,

dass alle Seiten des Schnittgebildes gleich lang sind. Da außerdem die Punkte *L*, *M*, *N* und *T* in einer Ebene [*H*] liegen, ist das Schnittgebilde eine Raute.

(4) Setzt man die Koordinaten von *D* in die „linke Seite“ der Koordinatengleichung von *H* ein, so erhält man 40 (>12). Ein Punkt $U(u\,|\,v\,|\,w)$ liegt genau dann auf derselben Seite der Ebene *H* (im selben Halbraum wie *D*), wenn ebenfalls $u - v + 4w > 12$ ist. Da $2{,}5 - 1 + 4\cdot 2{,}75 = 12{,}5 > 12$ ist, liegt auch *Q* auf derselben Seite von *H* wie *D*.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das Dreieck *LMN* gleichschenklig ist.	4			
2	(2) zeigt, dass das Dreieck *LMN* nicht rechtwinklig ist.	4			
3	(3) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks *LMN*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………… ……………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Parametergleichung der Ebene *H*.	3			
2	(1) ermittelt eine Koordinatengleichung der Ebene *H*.	4			
3	(2) bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden *g* und der Ebene *H*.	7			
4	(3) zeigt, dass die Gerade *g* die Ebene *H* senkrecht schneidet.	5			
5	(4) bestimmt das Volumen der Pyramide *LMND*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (24) …………………………………………………………… ……………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**24**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt den Schnittpunkt T der Ebene H mit der x_3-Achse.	3			
2	(2) skizziert in der *Abbildung* das Schnittgebilde, das die Ebene H mit dem Würfel bildet.	3			
3	(3) zeigt, dass das geometrische Schnittgebilde eine Raute ist.	3			
4	(4) beschreibt eine Vorgehensweise, mit der er prüfen kann, ob der Punkt $Q(2{,}5\,\|\,1\,\|\,2{,}75)$ auf derselben Seite der Ebene H wie der Punkt D liegt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Biologen wollen die Entwicklung einer Mäusebussardpopulation in einem Untersuchungsgebiet durch eine Matrix beschreiben. Dabei werden (auch in der gesamten folgenden Aufgabe) **ausschließlich** die **weiblichen Tiere** der Population betrachtet. Die Bussardpopulation besteht aus Küken (k), Jungvögeln (j), die noch nicht geschlechtsreif sind, und Altvögeln (a), die fortpflanzungsfähig sind. Die Küken entwickeln sich im Jahr nach dem Schlüpfen zu Jungvögeln und nach einem weiteren Jahr zu Altvögeln.
Nach Beobachtungen des Bestandes der Bussarde wurde vor ca. 25 Jahren zur Modellierung der Populationsentwicklung die Matrix

$$\begin{array}{ccc} & \text{von:} & \begin{array}{ccc} \;\;k\;\; & \;\;j\;\; & \;\;a\;\; \end{array} \\ \text{nach:} & & \\ \begin{array}{c} k \\ j \\ a \end{array} & A = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,79 \end{pmatrix} \end{array}$$

erstellt.

a) (1) *Stellen Sie die Entwicklung der Bussardpopulation nach dem vorgeschlagenen Modell durch einen Übergangsgraphen dar und interpretieren Sie die Bedeutung der Matrixeinträge 0,6 und 0,79 im Sachzusammenhang.*

(2) Zur Simulation der Entwicklung der Population wurde von einem Bestand von 30 Küken, 30 Jungvögeln und 30 Altvögeln ausgegangen.
Berechnen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Population für das nächste und das übernächste Jahr.

(3) *Berechnen Sie den Anteil der gerade geschlüpften Küken, die bei einer Modellierung mit der Matrix A drei Jahre später noch leben.*

(8 + 4 + 3 Punkte)

Name: ____________________

b) In einem Jahr wurden 60 Küken, 20 Jungvögel und 100 Altvögel im Beobachtungsgebiet gezählt.

Ermitteln Sie die Anzahlen an Küken, Jungvögeln und Altvögeln im Beobachtungsgebiet im Jahr zuvor, wenn die angegebene Modellierung der Populationsentwicklung durch die Matrix A vorausgesetzt wird.

(5 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie x und y so, dass* $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$ *gilt.*

[Zur Kontrolle: $x = 18$ und $y = 1$.]

(2) *Interpretieren Sie den Sachverhalt aus* c) (1) *im Kontext.*

(6 + 3 Punkte)

Veränderte Umweltbedingungen führen heute dazu, dass zur Modellierung jetzt die Matrix B gewählt wird:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

d) (1) *Vergleichen Sie die Matrizen A und B im Sachzusammenhang.*

Es ist $B^3 = \begin{pmatrix} 0{,}315 & 0{,}42 & 0{,}448 \\ 0 & 0{,}315 & 0{,}336 \\ 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}827 \end{pmatrix}$.

(2) Für eine Population wird vorausgesetzt, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Anzahlen von Küken, Jungvögeln und Altvögeln übereinstimmen. Eine Forschungsgruppe behauptet, dass in diesem Fall die Gesamtzahl der Tiere nach der Modellierung in einem Zeitraum von 3 Jahren um 20 % zunimmt.
Beurteilen Sie die Aussage.

Name: ____________________

(3) *Untersuchen Sie, bei welcher Überlebensrate u der Altvögel in der Matrix*
$B_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & u \end{pmatrix}$ *es nach der Modellierung eine von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene Verteilung auf die drei Entwicklungsstufen der Bussardpopulation gibt, die im folgenden Jahr wieder zu derselben Verteilung führt.*

Zurzeit lebt in einem Beobachtungsgebiet eine Population, bei der sich die Anzahlen von Küken, Jungvögeln und Altvögeln von Jahr zu Jahr nicht verändern. In der Population leben 50 Altvögel.

(4) *Bestimmen Sie die Anzahlen von Küken und Jungvögeln, wenn zur Modellierung der Population die Matrix* $B_{0,685} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}685 \end{pmatrix}$ *gewählt wird.*

(3 + 7 + 7 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Matrizenrechnung
   - Übergangsmatrizen
   - Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

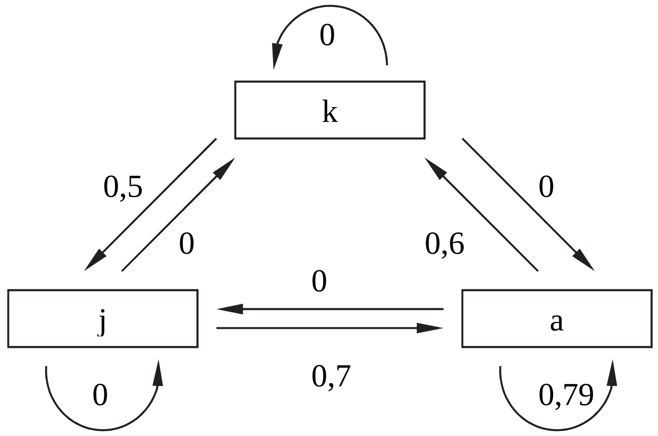
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Übergangsgraph:



Der Matrixeintrag 0,6 gibt die durchschnittliche Anzahl von weiblichen Bussardküken an, die von einem Bussardweibchen pro Jahr ausgebrütet werden.
Der Matrixeintrag 0,79 gibt den Anteil von (weiblichen) Altvögeln an, die das nächste Lebensjahr erreichen.

(2) Berechnung der Verteilungsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ für das nächste und das übernächste Jahr:

$$\vec{v}_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 44{,}7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 46{,}05 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 27 \\ 9 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Modell wird nach einem Jahr ein Bestand von 18 Küken, 15 Jungvögeln und 45 Altvögeln und nach zwei Jahren ein Bestand von 27 Küken, 9 Jungvögeln und 46 Altvögeln erreicht.

(3) $Anteil = 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}79 = 0{,}2765$. Knapp 28 % der Küken leben drei Jahre später noch.

Teilaufgabe b)

Für die gesuchte Verteilung mit dem Verteilungsvektor $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0{,}6v_3 = 60 \\ 0{,}5v_1 = 20 \\ 0{,}7v_2 + 0{,}79v_3 = 100 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} v_3 = 100 \\ v_1 = \ \ 40 \\ v_2 = \ \ 30 \end{matrix} \right| .$$

Nach dem Modell sollten im vergangenen Jahr im Beobachtungsgebiet 40 Küken, 30 Jungvögel und 100 Altvögel gelebt haben.

Teilaufgabe c)

(1) $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}79 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$ ist gleichbedeutend mit

$$\left| \begin{matrix} 18 = yx \\ 0{,}5x = 9y \\ 6{,}3 + 23{,}7 = 30y \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 18 = 18 \\ x = 18 \\ y = 1 \end{matrix} \right|$$

. Es ist $x = 18$ und $y = 1$.

(2) Nach der Modellierung gibt es für 9 Jungvögel und 30 Altvögel genau eine Verteilung von Küken, Jungvögeln und Altvögeln, die im folgenden Jahr zu einem Vielfachen bzw. einer Gleichheit der Populationsverteilung führt. Diese Verteilung umfasst 18 Küken und führt zu einer – bezogen auf Anzahlen in den drei Altersklassen – sich nicht ändernden Population.

Teilaufgabe d)

(1) Nach einer Modellierung durch Matrix B sind im Vergleich zu einer Modellierung durch Matrix A die durchschnittliche Nachkommenzahl pro Jahr der Altvögel und die Überlebensraten (in jedem Altersstadium) erhöht. Deswegen wächst die Population nach einer Modellierung durch Matrix B stärker als nach einer Modellierung durch Matrix A.

(2) $B^3 \cdot \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}315 & 0{,}42 & 0{,}448 \\ 0 & 0{,}315 & 0{,}336 \\ 0{,}36 & 0{,}48 & 0{,}827 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}183v \\ 0{,}651v \\ 1{,}667v \end{pmatrix}$.

Gesamtzahl der Tiere zu Beginn: $v + v + v = 3v$.

Gesamtzahl der Tiere nach drei Jahren: $1{,}183v + 0{,}651v + 1{,}667v = 3{,}501v$.

$(3{,}501v) : (3v) = 1{,}167$.

Die Behauptung der Forschungsgruppe ist falsch, da die Zunahme der Anzahl der Tiere nur 16,7 % beträgt.

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0{,}7s_3 = s_1 \\ 0{,}6s_1 = s_2 \\ 0{,}75s_2 + u \cdot s_3 = s_3 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 0{,}7s_3 = s_1 \\ 0{,}6s_1 = s_2 \\ (u - 0{,}685) \cdot s_3 = 0 \end{matrix} \right|$.

$(u - 0{,}685) \cdot s_3 = 0 \Leftrightarrow (u - 0{,}685) = 0 \vee s_3 = 0$.

$s_3 = 0$ kann nicht gelten, da sonst auch $s_1 = 0$ und $s_2 = 0$ und damit $\vec{s} = \vec{0}$ sein würde.

Das steht im Widerspruch zu $\vec{s} \neq \vec{0}$.

Also gilt $u - 0{,}685 = 0$ und somit $u = 0{,}685$.

Genau bei einer Überlebensrate der Altvögel von 68,5 % ist die Population stabil.

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}685 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \cdot 50 \\ 0{,}6s_1 \\ 0{,}75s_2 + 0{,}685 \cdot 50 \end{pmatrix}$.

Es folgt, dass $s_1 = 0{,}7 \cdot 50 = 35$, $s_2 = 0{,}6 \cdot 35 = 21$ und $0{,}75 \cdot 21 + 0{,}685 \cdot 50 = 50$ (wahr) gilt.

Im Beobachtungsgebiet gehören 50 Altvögel, 35 Küken und 21 Jungvögel zur Bussardpopulation.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die Entwicklung der Bussardpopulation nach dem vorgeschlagenen Modell durch einen Übergangsgraphen dar.	5			
2	(1) interpretiert die Bedeutung der Matrixeinträge 0,6 und 0,79 im Sachzusammenhang.	3			
3	(2) berechnet die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Population für das nächste und das übernächste Jahr.	4			
4	(3) berechnet den Anteil der gerade geschlüpften Küken, die bei einer Modellierung mit der Matrix *A* drei Jahre später noch leben.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Anzahlen an Küken, Jungvögeln und Altvögeln im Beobachtungsgebiet im Jahr zuvor, wenn die angegebene Modellierung der Populationsentwicklung durch die Matrix *A* vorausgesetzt wird.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt x und y so, dass $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} x \\ 9 \\ 30 \end{pmatrix}$ gilt.	6			
2	(2) interpretiert den Sachverhalt aus c) (1) im Kontext.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) vergleicht die Matrizen A und B im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) beurteilt die Aussage.	7			
3	(3) untersucht, bei welcher Überlebensrate u der Altvögel in der Matrix $B_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & u \end{pmatrix}$ es nach der Modellierung eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Verteilung auf die drei Entwicklungsstufen der Bussardpopulation gibt, die im folgenden Jahr wieder zu derselben Verteilung führt.	7			
4	(4) bestimmt die Anzahlen von Küken und Jungvögeln, wenn zur Modellierung der Population die Matrix $B_{0{,}685} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}685 \end{pmatrix}$ gewählt wird.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (21) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**21**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Nutzung von sozialen Netzwerken wird immer beliebter. Dabei nutzen immer mehr Jugendliche verschiedene soziale Netzwerke. Es wird davon ausgegangen, dass 30 % aller Jugendlichen das (fiktive) soziale Netzwerk „Freundschaftsbuch" nutzen.
Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit dafür verwendet werden, dass eine zufällig befragte jugendliche Person „Freundschaftsbuch" nutzt.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten Jugendlichen*
   (1) *genau 33 Jugendliche „Freundschaftsbuch" nutzen,*
   (2) *höchstens 25 Jugendliche „Freundschaftsbuch" nutzen,*
   (3) *die Anzahl der jugendlichen Nutzer, die „Freundschaftsbuch" nutzen, einem Wert entspricht, der sich um maximal 5 vom Erwartungswert unterscheidet.*

(2 + 3 + 5 Punkte)

b) *Ermitteln Sie die Anzahl an zufällig ausgewählten Jugendlichen, die mindestens ausgewählt werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Jugendlichen antrifft, der „Freundschaftsbuch" nutzt.*

(6 Punkte)

c) In einer Schule gibt es zur schulinternen Kommunikation ein eigenes Netzwerk, das sowohl von Jugendlichen genutzt wird, die „Freundschaftsbuch" nutzen, als auch von Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch" nicht nutzen. Dabei ist in beiden Gruppen der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, identisch. Im Folgenden wird dieser Anteil mit h bezeichnet und auch als Wahrscheinlichkeit für den jeweiligen Fall verwendet.

Name: ____________________

(1) *Erstellen Sie zu dem gegebenen Sachverhalt eine geeignete Darstellung (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel etc.).*

(2) Der Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, kann mit Hilfe des Terms $0,3 \cdot (1-h) + 0,7h$ beschrieben werden.

Erklären Sie die einzelnen Bestandteile des Terms.

(3) *Berechnen Sie den Anteil aller Jugendlichen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, wenn der Anteil der Jugendlichen, die genau eines dieser Netzwerke nutzen, bei 0,4 liegt.*

Im Folgenden sei $h = 0,25$.

(4) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte jugendliche Person mindestens eines der beiden Netzwerke nutzt.*

(5) Eine zufällig ausgewählte jugendliche Person nutzt das schulinterne Netzwerk.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie „Freundschaftsbuch“ nicht nutzt.

(4 + 3 + 3 + 4 + 3 Punkte)

d) Die Schülervertretung möchte, dass der Nutzungsgrad des schulinternen Netzwerks verbessert wird. Dazu soll mit Aktionen das schulinterne Netzwerk bekannter gemacht werden. Nach einem Jahr möchte die Schülervertretung die Vermutung überprüfen, dass der Nutzungsgrad von vormals 25 % gestiegen ist, und möchte dazu 50 zufällig ausgewählte Jugendliche der Schule befragen.

(1) *Geben Sie eine geeignete Nullhypothese an und ermitteln Sie eine passende Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau von* $\alpha = 0,05$.

(2) Bei der Befragung kommt heraus, dass 19 Jugendliche das schulinterne Netzwerk nutzen.
Beurteilen Sie die Situation aus Sicht der Schülervertretung.

(3) *Beschreiben Sie den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.*

(4) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 % liegt.*

(8 + 2 + 2 + 5 Punkte)

Name: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5 = *p*	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilungen für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B\left(n;p;0\right) + \ldots + B\left(n;p;k\right) = \binom{n}{0} p^{0} \left(1-p\right)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^{k} \left(1-p\right)^{n-k}$$

							p							
n	*k*	0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		*n*
	0	0.0769	0.0266	0.0052	0.0003	0.0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0.2794	0.1265	0.0338	0.0029	0.0012	0.0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0.5405	0.3108	0.1117	0.0142	0.0066	0.0013	0.0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0.7604	0.5327	0.2503	0.046	0.0238	0.0057	0.0005	0.0002	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0.8964	0.729	0.4312	0.1121	0.0643	0.0185	0.0021	0.0008	0.0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0.9622	0.865	0.6161	0.2194	0.1388	0.048	0.007	0.003	0.0007	0.0001	0,0000	44	
	6	0.9882	0.9417	0.7702	0.3613	0.2506	0.1034	0.0194	0.0089	0.0025	0.0005	0,0000	43	
	7	0.9968	0.978	0.8779	0.5188	0.3911	0.1904	0.0453	0.0228	0.0073	0.0017	0.0001	42	
	8	0.9992	0.9927	0.9421	0.6681	0.5421	0.3073	0.0916	0.0503	0.0183	0.005	0.0002	41	
	9	0.9998	0.9978	0.9755	0.7911	0.683	0.4437	0.1637	0.0979	0.0402	0.0127	0.0008	40	
	10		0.9994	0.9906	0.8801	0.7986	0.5836	0.2622	0.1701	0.0789	0.0284	0.0022	39	
	11		0.9999	0.9968	0.9372	0.8827	0.7107	0.3816	0.2671	0.139	0.057	0.0057	38	
	12			0.999	0.9699	0.9373	0.8139	0.511	0.3837	0.2229	0.1035	0.0133	37	
	13			0.9997	0.9868	0.9693	0.8894	0.637	0.5099	0.3279	0.1715	0.028	36	
	14			0.9999	0.9947	0.9862	0.9393	0.7481	0.6331	0.4468	0.2612	0.054	35	
	15				0.9981	0.9943	0.9692	0.8369	0.7425	0.5692	0.369	0.0955	34	
	16				0.9993	0.9978	0.9856	0.9017	0.8311	0.6839	0.4868	0.1561	33	
50	17				0.9998	0.9992	0.9937	0.9449	0.8966	0.7822	0.6046	0.2369	32	50
	18				0.9999	0.9997	0.9975	0.9713	0.941	0.8594	0.7126	0.3356	31	
	19					0.9999	0.9991	0.9861	0.9686	0.9152	0.8036	0.4465	30	
	20						0.9997	0.9937	0.9845	0.9522	0.8741	0.561	29	
	21						0.9999	0.9974	0.9929	0.9749	0.9244	0.6701	28	
	22							0.999	0.9969	0.9877	0.9576	0.766	27	
	23							0.9996	0.9988	0.9944	0.9778	0.8438	26	
	24							0.9999	0.9996	0.9976	0.9892	0.9022	25	
	25								0.9998	0.9991	0.9951	0.9427	24	
	26									0.9997	0.9979	0.9686	23	
	27									0.9999	0.9992	0.984	22	
	28										0.9997	0.9924	21	
	29										0.9999	0.9966	20	
	30											0.9986	19	
	31		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000									0.9995	18	
	32											0.9998	17	
	33											0.9999	16	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	*k*	*n*
							p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilungen für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		n
							p							
	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	70	
100	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	69	100
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	51	
	49										0,9996	0,9729	50	
	50										0,9998	0,9832	49	
	51			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9900	48	
	52											0,9942	47	
	53											0,9968	46	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	k	n
							p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2016

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2016

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße *X*: „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,3$ und $n = 100$.

(1) $P(X = 33) \approx 0,069$.

(2) $P(X \leq 25) \approx 0,163$.

(3) Da der Erwartungwert $\mu = 100 \cdot 0,3 = 30$ ist, wird die Wahrscheinlichkeit für $25 \leq X \leq 35$ gesucht. Es ist
$P(25 \leq X \leq 35) = P(X \leq 35) - P(X \leq 24) \approx 0,884 - 0,114 = 0,770$.

Teilaufgabe b)

Die Zufallsgröße *X*: „Anzahl der ausgewählten Jugendlichen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen“ kann weiterhin als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,3$ und unbekanntem *n*.

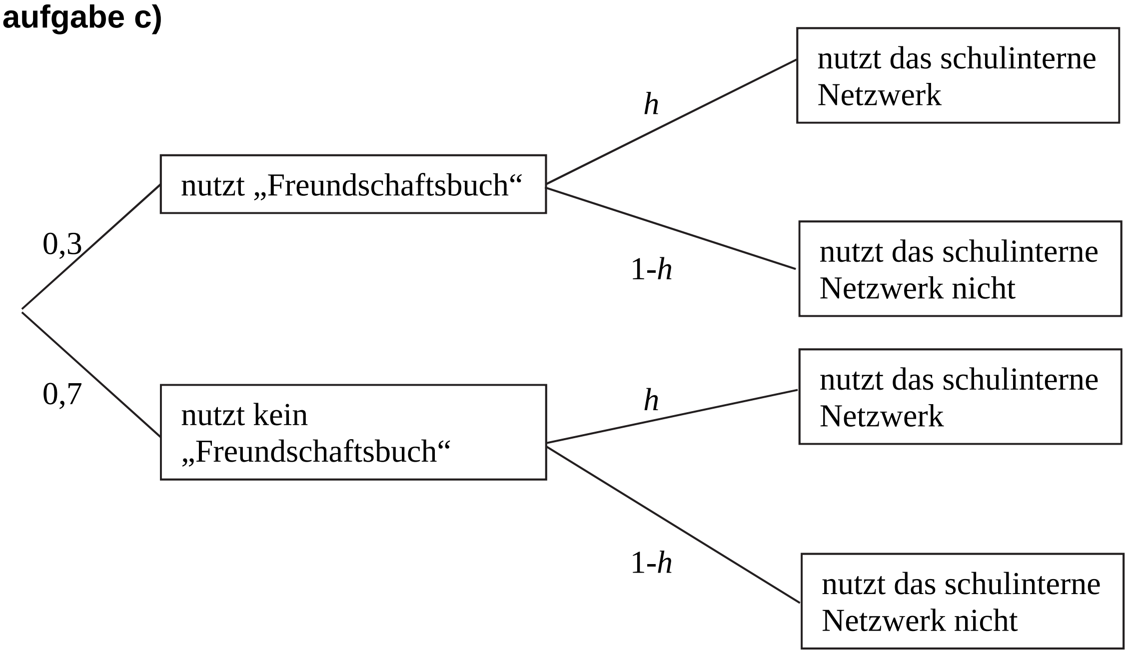
Dann ist *n* so zu bestimmen, dass $P(X \geq 1) \geq 0,99$ gilt:

$P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,01$
$\Leftrightarrow 0,7^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 12,91.$

Es müssen also mindestens 13 Jugendliche ausgewählt werden.

Teilaufgabe c)

(1)



oder

Eine jugendliche Person nutzt …	„Freundschaftsbuch“	„Freundschaftsbuch“ nicht	Summe
das schulinterne Netzwerk	0,3*h*	0,7*h*	*h*
das schulinterne Netzwerk nicht	0,3(1-*h*)	0,7(1-*h*)	1-*h*
Summe	0,3	0,7	1

(2) Den Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nutzen, aber nicht das schulinterne Netzwerk, kann man mit Hilfe des Terms $0,3\cdot(1-h)$ angeben (Pfadregel). Der Anteil derjenigen, die „Freundschaftsbuch“ nicht nutzen, dafür aber das schulinterne Netzwerk, kann mit Hilfe des Terms $0,7h$ angegeben werden (Pfadregel). Damit ist der Anteil derjenigen, die genau eines der beiden Netzwerke nutzen, die Summe der beiden Terme.

(3) Es ist also $0,3\cdot(1-h)+0,7h=0,4 \Leftrightarrow h=0,25$.

(4) Es ist

$$\begin{aligned}&P(\text{"}\mathit{nutzt\ mindestens\ eines\ der\ beiden\ Netzwerke}\text{"})\\&=P(\text{"}\mathit{nutzt\ genau\ eines\ der\ beiden\ Netzwerke}\text{"})+P(\text{"}\mathit{nutzt\ beide\ Netzwerke}\text{"})\\&=0,4+0,075=0,475.\end{aligned}$$

(5) Der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk nutzen, beträgt $h = 0,25$, während der Anteil derjenigen, die das schulinterne Netzwerk, nicht aber „Freundschaftsbuch“ nutzen, bei $0,7h = 0,175$ liegt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte jugendliche Person, die das schulinterne Netzwerk nutzt, „Freundschaftsbuch“ nicht nutzt:

$$P_{\text{nutzt das schulinterne Netzwerk}}(\text{"}\mathit{nutzt\ Freundschaftsbuch\ nicht}\text{"}) = \frac{0,7h}{h} = \frac{0,175}{0,25} = 0,7.$$

[Eine Argumentation mit der stochastischen Unabhängigkeit ist ebenfalls denkbar.]

Teilaufgabe d)

(1) Mit der Wahl von $H_0: p \le 0,25$ als Nullhypothese kann die Vermutung entsprechend überprüft werden. Dabei kann die Zufallsgröße *X:* „Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks“ als binomialverteilt angenommen werden.
Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man
$P_{p=0,25}(18 \le X) = 1 - P_{p=0,25}(X \le 17) \approx 0,055 > 0,05$ und
$P_{p=0,25}(19 \le X) = 1 - P_{p=0,25}(X \le 18) \approx 0,029 < 0,05$.
Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:
Verwirf die Nullhypothese, falls $X \ge 19$, also 19 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen.
[Alternative: Es ist $\mu = 50 \cdot 0,25 = 12,5$ und $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 3,062 > 3$, womit die Laplace-Bedingung erfüllt ist. Es gilt also $P(X < \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$.
Als Grenze ergibt sich $\mu + 1,64\sigma \approx 12,5 + 1,64 \cdot 3,062 \approx 17,522$ und somit lautet die Entscheidungsregel:
Verwirf die Nullhypothese, falls $X \ge 18$, also 18 oder mehr Jugendliche der Umfrage das schulinterne Netzwerk nutzen. (Diese Lösung wird ebenfalls akzeptiert, obwohl in diesem Fall das Signifikanzniveau nicht eingehalten wird.)]

(2) Im Fall $X = 19$ ist die Nullhypothese zu verwerfen. Die Schülervertretung bewertet ihre Aktionen also als gelungen.

(3) Macht die Schülervertretung den Fehler 1. Art, so ist die Bewertung der Situation auf Grund der Umfrage falsch. Man kann die Nullhypothese, dass sich die Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks nicht erhöht hat, nicht verwerfen. Die Bewertung der Aktionen als gelungen ist somit falsch.

(4) Macht die Schülervertretung den Fehler 2. Art, so verwirft sie aufgrund der Umfrage die Nullhypothese nicht und bewertet ihre Aktionen als nicht gelungen, und das, obwohl sich die Anzahl der Nutzer des schulinternen Netzwerks erhöht hat. Liegt der Nutzungsgrad in Wirklichkeit bei 40 %, so liegt die Auftrittswahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art mit $p = 0,4$, $n = 50$ und gegebener Grenze bei 19 [bzw. 18] bei
$\beta = P_{p=0,4}(X \leq 18) \approx 0,336$ [bzw. $\beta = P_{p=0,4}(X \leq 17) \approx 0,237$].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	stellt die Ungleichung auf.	3			
2	ermittelt die gesuchte Anzahl.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) erstellt eine geeignete Darstellung (Baumdiagramm, Vierfeldertafel etc.).	4			
2	(2) erklärt die einzelnen Bestandteile.	3			
3	(3) berechnet den gesuchten Anteil.	3			
4	(4) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
5	(5) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt eine geeignete Nullhypothese an.	3			
2	(1) ermittelt eine passende Entscheidungsregel.	5			
3	(2) beurteilt die Situation angemessen.	2			
4	(3) beschreibt den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.	2			
5	(4) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.	2			
6	(4) berechnet die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Fehlers 2. Art.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 40
mangelhaft plus	3	39 – 34
mangelhaft	2	33 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0