Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Medikament wird über eine (intravenöse) Dauerinfusion dem Körper kontinuierlich und gleichmäßig zugeführt. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut steigt dabei kontinuierlich an und strebt bei „langfristiger Infusion“ auf eine „Endkonzentration“ zu.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_a mit der Funktionsgleichung*

$$f_a(t) = a \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t}) \text{ für } t \geq 0 \ (a > 0)$$

die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut angemessen beschreibt, d. h., dass die Funktion die beiden oben im Text genannten Kriterien erfüllt.

(t in Stunden; $f_a(t)$ in mg/l)

Die Graphen von f_5, f_{10} und f_{15} sind in *Abbildung 1* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

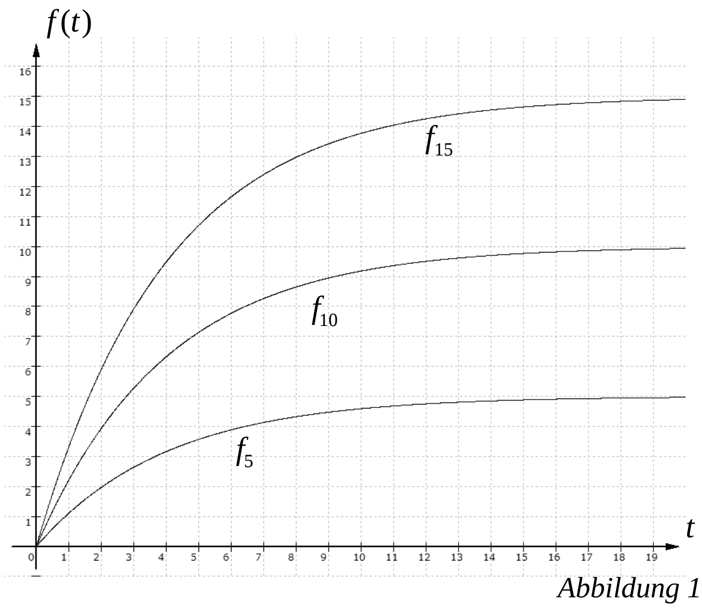


Abbildung 1

Name: ____________________

(2) *Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im Sachzusammenhang. Nutzen Sie dazu den Funktionsterm von f_a und die drei Beispielgraphen.*

Die Infusion wird am 15. April um 9 Uhr ($t = 0$) begonnen.
Um 11 Uhr wird eine Wirkstoffkonzentration des Medikaments von 5,902 mg/l im Blut gemessen.

(3) *Berechnen Sie den Parameterwert von a in der Funktionsgleichung von f_a, die den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration des Medikaments modelliert.*

Im Folgenden soll die Wirkstoffkonzentration durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t})$ modelliert werden.

(4) *Berechnen Sie $f(3)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(17 Punkte)

Wenn die Infusion nach t_{E} Stunden abgebrochen wird, nimmt die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut ab. Modellhaft wird angenommen, dass unmittelbar nach Abbruch der Infusion die Abnahme der Wirkstoffkonzentration beginnt.

Die Wirkstoffkonzentration kann jetzt durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$g(t) = f(t_{\mathrm{E}}) \cdot e^{-0,25 \cdot (t - t_E)}$ ($t \geq t_E$) beschrieben werden.

Um 1 Uhr des nächsten Tages wird die Infusion abgebrochen.

b) (1) *Zeigen Sie, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.*

Der Graph von g ist in *Abbildung 2* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $g(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

(2) *Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Änderung der Wirkstoffkonzentration für $t > 16$.*

(3) *Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Betrag der Änderung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments am 16. April von 4 Uhr bis 5 Uhr abnimmt.*

(11 Punkte)

Name: ____________________

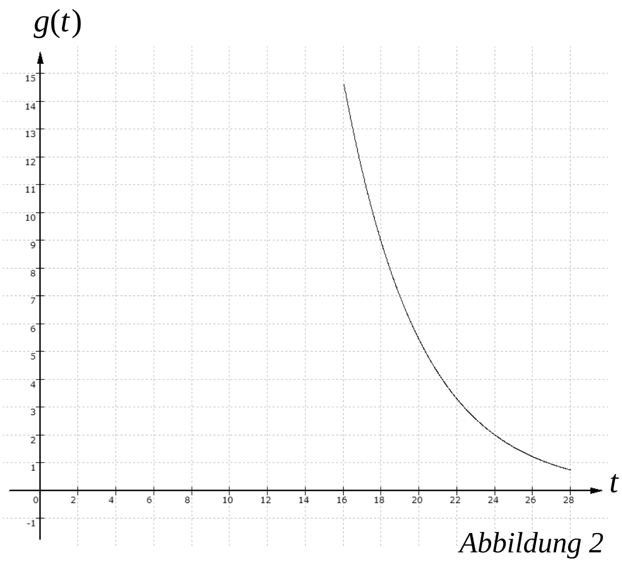


Abbildung 2

c) (1) Medizinische Untersuchungen haben ergeben, dass das Medikament nur wirksam ist, wenn die Wirkstoffkonzentration im Blut mindestens 8 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

(2) Wenn die Funktion *h* die Wirkstoffkonzentration eines Medikaments beschreibt, wird durch $m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t)\,\mathrm{d}t$ die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmt.

Ermitteln Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).

Um Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Medikamenten zu vermeiden, wird ein neues Medikament erst eingesetzt werden, wenn die Wirkstoffkonzentration des alten Medikaments unter 1 mg/l im Blut beträgt.

Am 16. April um 10 Uhr wird mit der intravenösen Dauerinfusion eines neuen Medikaments begonnen.

(3) *Prüfen Sie, ob die Aufnahme der Infusion mit dem neuen Medikament zu diesem Zeitpunkt im Sachzusammenhang sinnvoll ist.* (22 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Der Sachkontext erfordert die Nachweise, dass der Graph von f_{a} streng monoton steigend ist und für große Werte von *t sich* einem „festen Wert“ nähert.

(1) $f_{\mathrm{a}}'(t) = 0{,}25a \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

Da $e^{-0{,}25 \cdot t} > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ ist, folgt, dass $f_{\mathrm{a}}'(t) > 0$ für $t \geq 0$ gilt.

$\Rightarrow$ Der Graph von f_{a} ist streng monoton steigend.

Für große Werte von *t* gilt: $e^{-0{,}25 \cdot t}$ strebt gegen 0 $\Rightarrow f_a(t)$ strebt gegen *a*.

Langfristig stellt sich ein Medikamentenspiegel von ungefähr a $\mathrm{mg/l}$ im Blut ein.

(2) Eine Vergrößerung von *a* bedeutet ein schnelleres Ansteigen der Konzentration des Medikaments. Bei langfristiger Einnahme strebt die Konzentration auf a $\mathrm{mg/l}$ im Blut zu (siehe auch (1)).

(3) 11 Uhr $\widehat{=}$ $t = 2$

Also gilt: $f_{\mathrm{a}}(2) = 5{,}902$ bzw.

$$a(1 - e^{-0{,}25 \cdot 2}) = 5{,}902 \Leftrightarrow a = \frac{5{,}902}{1 - e^{-0{,}5}} = 14{,}999... \approx 15$$

(4) $f(3) = 15 \cdot (1 - e^{-0{,}75}) \approx 7{,}91$

Um 12 Uhr beträgt die Wirkstoffkonzentration im Blut ungefähr $7{,}91\ \mathrm{mg/l}$.

Modelllösung b)

(1) Für $t \geq 16$ gilt dann:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(16) \cdot e^{-0{,}25 \cdot (t-16)} \\ &= f(16) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot e^{4} \\ &= 15 \cdot (1 - e^{-4}) \cdot e^{4} \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \\ &\approx 803{,}972... \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \\ &\approx 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \end{aligned}$$

(2) Der Term $g'(t)$ beschreibt die Änderung der Wirkstoffkonzentration.

Es gilt: $g'(t) = -201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

(3) 4 Uhr $\widehat{=}$ $t = 19$ und 5 Uhr $\widehat{=}$ $t = 20$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Prozentsatz lässt sich aus

$$\frac{|k'(20)|}{|k'(19)|} = \frac{201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 20}}{201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 19}} = e^{-0{,}25} \approx 0{,}779$$ ermitteln.

$\Rightarrow$ Die Wirkstoffkonzentration nimmt in jeder Stunde um ca. 22 % ab.

Modelllösung c)

(1) Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration von $8\ \mathrm{mg/l}$ (erstmals) erreicht wird:

$f(t_1) = 8$, d. h.

$$15 \cdot (1 - e^{-0{,}25 \cdot t_1}) = 8 \Leftrightarrow e^{-0{,}25 \cdot t_1} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow t_1 = -4 \cdot \ln \frac{7}{15} = 3{,}048...$$

Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration wieder auf $8\ \mathrm{mg/l}$ abgesunken ist:

$g(t_2) = 8$, d. h.

$$804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t_2} = 8 \Leftrightarrow e^{-0{,}25 \cdot t_2} = \frac{2}{201} \Leftrightarrow t_2 = -4 \cdot \ln \frac{2}{201} = 18{,}440...$$

Der gesuchte Zeitraum ergibt sich aus:

$t_{\mathrm{D}} = t_2 - t_1 = 15{,}392...\ \mathrm{h} = 15\ \mathrm{h}\ 23{,}52...\ \mathrm{min} \approx 15\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$.

(2) Für die mittlere Wirkstoffkonzentration innerhalb des vorgegebenen Zeitraums gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} f(t)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} 15 \cdot \left(1 - e^{-0{,}25 \cdot t}\right)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(t + 4 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\right)\right]_0^{16} + \left[-3216 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}\right]_{16}^{24}\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(16 + 4 \cdot e^{-4}\right) - 15 \cdot 4\right] + \left[-3216 \cdot \left(e^{-6} - e^{-4}\right)\right]\right) \\ &\approx 9{,}668\ \mathrm{mg/l}. \end{aligned}$$

(3) Medikamentenkonzentration am 16. April um 10 Uhr $\hat{=}$ $g(25)$

$g(25) = 804 \cdot e^{-6{,}25} \approx 1{,}552\ \mathrm{mg/l}$

Das neue Medikament kann am 16. April um 10 Uhr noch nicht eingesetzt werden, da die Wirkstoffkonzentration des alten Medikaments zu diesem Zeitpunkt über $1\ \mathrm{mg/l}$ im Blut liegt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass die Funktion f_a streng monoton steigend ist.	5
2	(1) zeigt, dass die Funktion „langfristig“ auf einen festen Wert zustrebt.	3
3	(2) beschreibt die Bedeutung des Parameters *a* im Sachzusammenhang.	2
4	(3) berechnet den Parameterwert von *a*.	3
5	(4) berechnet $f(3)$.	2
6	(4) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.	5
2	(2) gibt an, dass $g'(t)$ die Änderung der Wirkstoffkonzentration beschreibt, und berechnet $g'(t)$.	3
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.	8
2	(2) gibt einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Wirkstoffkonzentration im angegeben Zeitraum an.	4
3	(2) ermittelt die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).	7
4	(3) prüft, ob die Aufnahme der Infusion mit dem neuen Medikament zu diesem Zeitpunkt im Sachzusammenhang sinnvoll ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(1) zeigt, dass die …	3			
3	(2) beschreibt die Bedeutung …	2			
4	(3) berechnet den Parameterwert …	3			
5	(4) berechnet $f(3)$.	2			
6	(4) interpretiert den Wert …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ …	5			
2	(2) gibt an, dass …	3			
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Zeitspanne …	8			
2	(2) gibt einen Ansatz …	4			
3	(2) ermittelt die mittlere …	7			
4	(3) prüft, ob die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (22) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**22**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Das Logo der Firma Westwerk ist eine Fläche, deren Rand sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch Teile der Graphen der Funktionen g und h mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x^4 - 3{,}75x^2 - 1\,,$$

$$h(x) = x^4 - 3x^2 - 4\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

beschreiben lässt (siehe *Abbildung* auf Seite 2). Das Logo wird bei dieser Beschreibung durch die Graphen von g und h eingeschlossen. 1 Längeneinheit entspricht 1 cm.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Logo eine achsensymmetrische Figur ist.*

(2) *Geben Sie die maximale Breite des Logos an.*

(3) Die Punkte P und Q liegen zwei Millimeter direkt „unter" den tiefsten Punkten der oberen Begrenzungslinie des Logos. Zur Befestigung verbindet eine Querstrebe die Punkte P und Q.

Bestimmen Sie rechnerisch die Länge der Querstrebe.

(4) Die Graphen von g und h besitzen jeweils genau zwei Wendepunkte.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wendepunkte der Graphen der Begrenzungskurven des Logos an verschiedenen Stellenliegen.

(26 Punkte)

b) Zum Firmenjubiläum soll das Logo für verdiente Mitarbeiter in Silber produziert werden. Die Dicke soll 1 mm betragen.

(1) *Weisen Sie nach, dass das Volumen von einem Logo* $0{,}8\ \text{cm}^3$ *beträgt.*

(2) *Berechnen Sie die Silbermasse, die für 150 Logos benötigt wird.*

[$1\ \text{cm}^3$ Silber hat eine Masse von 10,5 g.] (9 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Punkte $P(-x\,|\,g(-x))$, $Q(-x\,|\,-4)$, $R(x\,|\,-4)$ und $S(x\,|\,g(x))$ sind für alle $0 < x < a$ $(a \approx 1{,}08)$ die Eckpunkte eines Rechtecks, das ganz im Inneren des Logos liegt. In das Rechteck soll der Name der Firma eingefügt werden.

(1) *Zeichnen Sie das Rechteck für $x = 0{,}5$ in die Abbildung.*

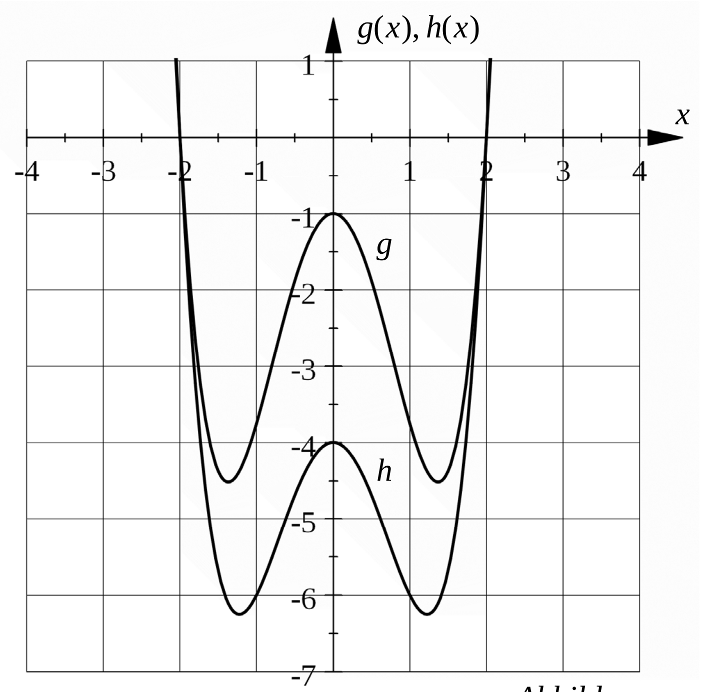
(2) *Weisen Sie nach, dass der Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks allgemein durch die Funktionsgleichung $A(x) = 2x^5 - 7{,}5x^3 + 6x$ beschrieben werden kann.*

(3) Unter den Rechtecken gibt es genau ein relativ größtes, das zugleich auch das absolut größte Rechteck ist.

Begründen Sie, dass die Breite des flächengrößten Rechtecks zwischen 1 cm und 1,2 cm liegt.

(4) Für die Beschriftung soll das Rechteck eine Breite von 1,5 cm haben.

Berechnen Sie die Höhe des Rechtecks. (15 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da x nur in geraden Potenzen in den Funktionstermen von g und h vorkommt (z. B. $1 = 1 \cdot x^0$), sind die Graphen von g und h achsensymmetrisch zur „y-Achse“.

$\Rightarrow$ Das Logo ist eine achsensymmetrische Figur.

[Mögl. Alternative: Vergleich $g(x)$ und $g(-x)$ bzw. $h(x)$ und $h(-x)$ für alle $x \in IR$]

(2) Die größte Breite des Logos beträgt 4 cm.

(3) Der Abstand der Punkte P und Q entspricht dem Abstand der Tiefpunkte des Graphen von g.

Ableitungen von g:

$g'(x) = 4x^3 - 7{,}5x$

$g''(x) = 12x^2 - 7{,}5$

Extremstellen von g:

Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion g lautet $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 7{,}5x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 7{,}5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 7{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{1{,}875} \vee x = -\sqrt{1{,}875}$

$g''(0) = -7{,}5 < 0$: relatives Maximum an der Stelle 0.

$g''\left(\sqrt{1{,}875}\right) = g''\left(-\sqrt{1{,}875}\right) = 22{,}5 - 7{,}5 > 0$:

relatives Minimum an den Stellen $\sqrt{1{,}875}$ und $-\sqrt{1{,}875}$.

Die Querstrebe ist $2\sqrt{1{,}875} \approx 2{,}74$ cm lang.

(4) Wendestellen von *h*:

Ein notwendiges Kriterium für eine Wendestelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion *h* lautet $h''(x) = 0$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{0{,}5} \vee x = -\sqrt{0{,}5}$

Höchstens an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$ können Wendestellen von *h* liegen. Da der Graph von *h* genau zwei Wendepunkte besitzt, liegen die Wendepunkte von *h* an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$.

Ableitungen von *g*:

$g'(x) = 4x^3 - 7{,}5x$

$g''(x) = 12x^2 - 7{,}5$ (s. o.)

Da $g''\left(\sqrt{0{,}5}\right) = g''\left(-\sqrt{0{,}5}\right) = -1{,}5 \neq 0$ ist, ist das notwendige Kriterium für Wendepunkte an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$ für die Funktion *g* nicht erfüllt. Die Wendepunkte der Graphen von *g* und *h* liegen an verschiedenen Stellen.

[Analog können auch zuerst die Wendestellen des Graphen von *g* berechnet werden. Möglich wäre auch eine Bestimmung der Wendestellen der Graphen von *g* und *h*.]

Modelllösung b)

(1) Für den Rauminhalt eines Logos gilt: $V = G \cdot \mathit{Höhe}$.

Berechnung von *G*:

$G = \int_{-2}^{2} [g(x) - h(x)]\mathrm{d}x$ (Der Graph von *g* liegt oberhalb des Graphen von *h*.)

$= 2 \cdot \int_{0}^{2} (-0{,}75x^2 + 3)\,\mathrm{d}x$

$= 2 \cdot \left[-0{,}25x^3 + 3x\right]_0^2$

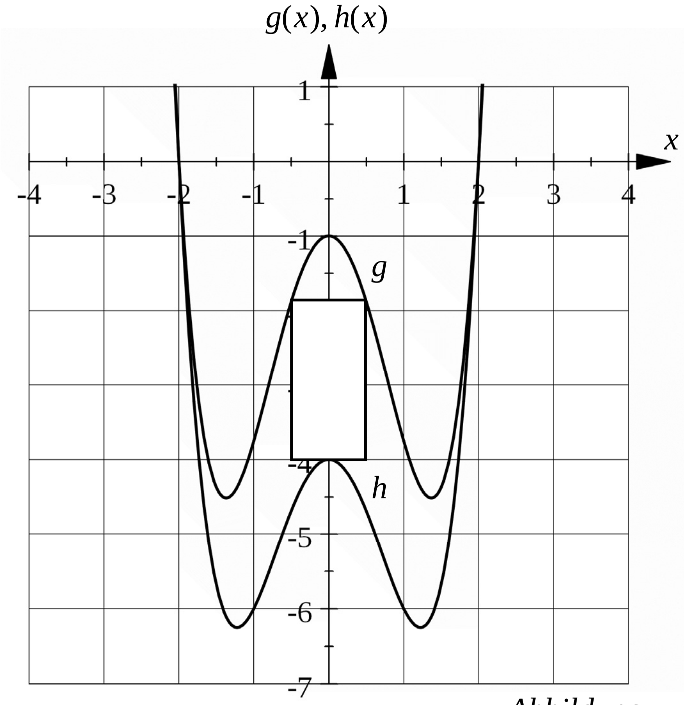
$= 8$

Es gilt $G = 8\text{ cm}^2$ und $V = 8\text{ cm}^2 \cdot 0{,}1\text{ cm} = 0{,}8\text{ cm}^3$.

(2) Die Silbermasse der 150 Logos beträgt $150 \cdot 0{,}8 \cdot 10{,}5\text{ g} = 1260\text{ g}$.

Modelllösung c)

(1)



Abbildung

(2) „Breite“ des Rechtecks: $x-(-x)=2x$

„Höhe“ des Rechtecks: $g(x)-(-4)=x^4-3{,}75x^2+3$

Für den Flächeninhalt des Rechtecks folgt:

$$A(x)=2x\cdot(x^4-3{,}75x^2+3)$$
$$=2x^5-7{,}5x^3+6x\,.$$

(3) $A'(x)=10x^4-22{,}5x^2+6$

Es gilt: $A'(0{,}5)=1$ und $A'(0{,}6)=-0{,}80$.

$\Rightarrow$ Die Funktion A' besitzt eine Nullstelle im Intervall $]0{,}5;0{,}6[$. An dieser Stelle liegt ein Vorzeichenwechsel (+/–) vor. Es folgt, dass der Graph von A an dieser Stelle ein relatives Maximum besitzt. Nach der Vorbemerkung zu Aufgabenteil c) (3) besitzt der Graph von A nur ein relatives Maximum, das zugleich absolutes Maximum ist.

$\Rightarrow$ Für die x-Koordinate des größten Rechtecks folgt: $0{,}5<x<0{,}6$.

$\Rightarrow$ Die Breite des flächengrößten Rechtecks liegt zwischen 1 cm und 1,2 cm.

[Alternativ kann z. B. die konkrete Berechnung der Maximalstelle der Flächeninhaltsfunktion mit Hilfe eines hinreichenden Kriteriums erfolgen.]

(4) Da das Rechteck in dem Logo und zwar achsensymmetrisch zur Symmetrieachse des Logos („y-Achse“) liegen soll, gilt für die maximale Höhe b des Rechtecks

$b=g(0{,}75)-h(0)$

$\Rightarrow b=0{,}75^4-3{,}75\cdot 0{,}75^2-1+4\approx 1{,}21.$

Die maximale Höhe des Rechtecks beträgt ungefähr 1,21 cm.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass das Logo achsensymmetrisch ist.	4
2	(2) gibt die maximale Breite des Logos an.	2
3	(3) gibt an, dass der Abstand der Punkte *P* und *Q* dem Abstand der Tiefpunkte entspricht.	2
4	(3) berechnet die 1. Ableitung und die möglichen Extremstellen der Funktion *g*.	5
5	(3) bestimmt die Länge der Querstrebe.	5
6	(4) weist rechnerisch nach, dass die Wendepunkte der Graphen von *g* und *h* an verschiedenen Stellen liegen.	8
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) weist nach, dass das Volumen eines Logos 0,8 cm^3 beträgt.	7
2	(2) berechnet die benötigte Silbermasse.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeichnet das Rechteck für $x = 0{,}5$ in die Abbildung.	2
2	(2) weist nach, dass der Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks allgemein durch die Funktionsgleichung $A(x) = 2x^5 - 7{,}5x^3 + 6x$ beschrieben werden kann.	4
3	(3) begründet, dass die Breite des flächengrößten Rechtecks zwischen 1 cm und 1,2 cm liegt.	6
4	(4) berechnet die maximale Höhe des Rechtecks.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass das …	4			
2	(2) gibt die maximale …	2			
3	(3) gibt an, dass …	2			
4	(3) berechnet die 1. Ableitung …	5			
5	(3) bestimmt die Länge …	5			
6	(4) weist rechnerisch nach …	8			
sachlich richtige Alternativen: (26) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**26**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) weist nach, dass …	7			
2	(2) berechnet die benötigte …	2			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet das Rechteck…	2			
2	(2) weist nach, dass …	4			
3	(3) begründet, dass die …	6			
4	(4) berechnet die maximale …	3			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

a) (1) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades ist zum Ursprung symmetrisch und verläuft durch den Punkt $P(3\,|\,0)$. Außerdem beträgt die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Ursprung $-4{,}5$.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

[Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x,\ x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f ist auf Seite 2 dargestellt.]

(2) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(3) *Untersuchen Sie, ob einer der Extrempunkte der Funktion f auf der Tangente im Wendepunkt liegt.* (16 Punkte)

b) Streckt man den Graphen der Funktion f in y-Richtung mit dem (positiven) Streckfaktor k, so entsteht der Graph der Funktion h. Dieser Graph schließt mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt $A = 4{,}5$ FE ein.

(1) *Bestimmen Sie den Streckfaktor k.*

[Zur Kontrolle: $k = \frac{2}{9}$]

(2) *Geben Sie eine Gleichung der Funktion h an.* (8 Punkte)

c) (1) Gegeben ist die Gerade g_m mit der Gleichung $g_m(x) = mx,\ x \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweisen Sie: Genau für $m > -1$ schneidet die Gerade g_m den Graphen der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = \frac{1}{9}x^3 - x,\ x \in \mathbb{R}$, in drei Punkten.

(2) *Weisen Sie nach: In* c) (1) *ergeben sich für $m > -1$ die Schnittpunkte $P_1(0\,|\,0)$, $P_2(3\sqrt{m+1}\,|\,3m\sqrt{m+1})$ und $P_3(-3\sqrt{m+1}\,|\,-3m\sqrt{m+1})$.* (9 Punkte)

Name: ____________________

d) Für $m > -1$ sei $A(m)$ der Inhalt der Fläche, die von dem Graphen der Funktion h (mit der in c) (1) angegebenen Gleichung) und der Geraden g_m aus c) (1) eingeschlossen wird.

(1) *Erstellen Sie eine geeignete Skizze für* $m = -\frac{1}{3}$.

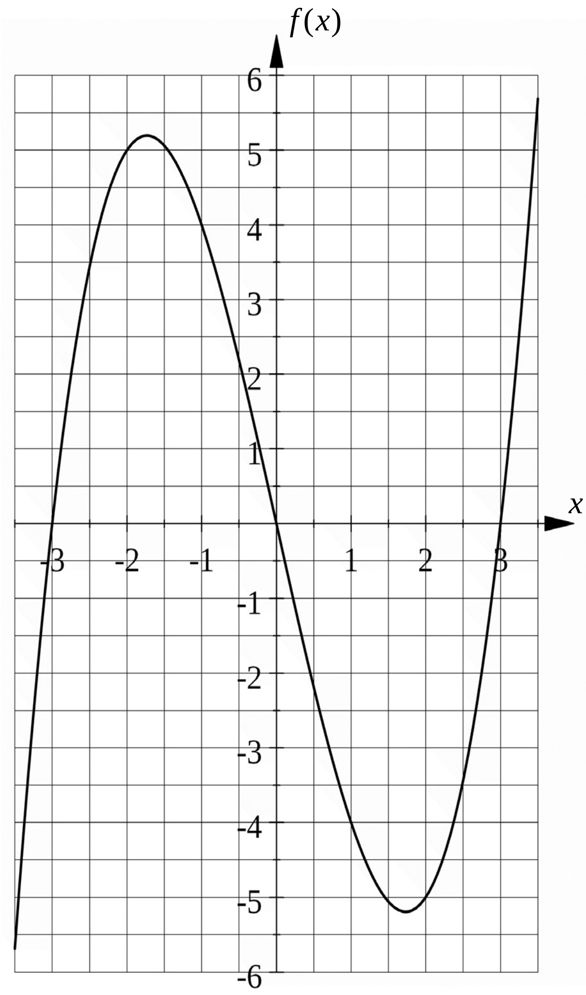
(2) *Zeigen Sie:* $A(m) = 4{,}5(m+1)^2$.

(3) Der Graph der Funktion h wird im I. Quadranten durch die Gerade g_3 im Punkt S und im IV. Quadranten durch die Gerade $g_{-\frac{1}{3}}$ im Punkt T geschnitten.

Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte.

(4) *Stellen Sie die Gerade* g_3 *und die Strecke* $\overline{ST}$ *in der Skizze aus* d) (1) *dar.*

(5) *Bestimmen Sie mit Hilfe von* d) (2) *den Inhalt der Fläche, die von der Strecke* $\overline{ST}$ *und dem Graphen von* h *eingeschlossen wird.*



(17 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Wegen der Punktsymmetrie des Graphen von *f* zum Ursprung gilt $f(x) = ax^3 + bx$, $x \in \mathbb{R}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ ist. Es ist $f'(x) = 3ax^2 + b$. Aus der Aufgabenstellung entnimmt man $f(3) = 0$ und $f'(0) = -4{,}5$.

Hieraus ergibt sich folgendes LGS: I. $0 = 27a + 3b$, II. $b = -4{,}5$.

Also ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{9}{2}$. Folglich gilt $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Es gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$.

(3) Man erhält $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}$ und $f''(x) = 3x$. Offensichtlich besitzt f' die Nullstellen $x_1 = \sqrt{3}$ und $x_2 = -\sqrt{3}$. Wegen $f''(x_1) \neq 0$ bzw. $f''(x_2) \neq 0$ erhält man die Extrempunkte $E_1(\sqrt{3} \mid -3\sqrt{3})$ und $E_2(-\sqrt{3} \mid 3\sqrt{3})$. Da $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 3$ ist, ist der Ursprung der Wendepunkt der Funktion *f*.

[Alternativ: Der Graph von *f* ist punktsymmetrisch zum Ursprung.]

Die Gleichung der Wendetangente ist $y = -\frac{9}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$. Unmittelbar ergibt sich, dass keiner der beiden Extrempunkte auf der Wendetangente liegt.

Modelllösung b)

(1) Nach Aufgabenstellung erhält man wegen der Punktsymmetrie des Graphen von *f* zum Ursprung $k\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x\right)\mathrm{d}x = -2{,}25$. Dieses ist äquivalent zu $k\left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{9}{4}x^2\right]_0^3 = -2{,}25$.

Hieraus ergibt sich $-\frac{81}{8}k = -2{,}25$ und somit $k = \frac{2}{9}$.

(2) Die Funktion *h* hat die Gleichung $h(x) = \frac{2}{9} \cdot f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Modelllösung c)

(1) $x_s \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Schnittstelle der Geraden g_m und des Graphen der Funktion *h*,

wenn folgende Gleichung gilt: $mx_s = \frac{1}{9}x_s^3 - x_s$. Dieses ist äquivalent zu $x_s = 0 \vee 9(m+1) = x_s^2$.

Nun ist $x_s^2 > 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Die Behauptung ist bewiesen.

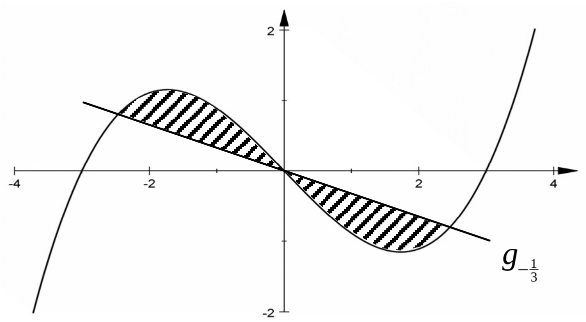
(2) Aus den Überlegungen in c) (1) ergeben sich die Schnittpunkte $P_1(0\,|\,0)$,

$P_2(3\sqrt{m+1}\,|\,3m\sqrt{m+1})$ und $P_3(-3\sqrt{m+1}\,|\,-3m\sqrt{m+1})$.

[Ein Prüfling, dem der Beweis von c) (1) nicht gelingt, kann den geforderten Nachweis durch „Punktproben“ erbringen.]

Modelllösung d)

(1) Skizze:



(2) Man erhält

$$\int_0^{3\sqrt{m+1}} \left(\frac{1}{9}x^3 - x - mx\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{m}{2}x^2\right]_0^{3\sqrt{m+1}} = \frac{81}{36}(m+1)^2 - \frac{9}{2}(m+1) - \frac{9}{2}m(m+1)$$

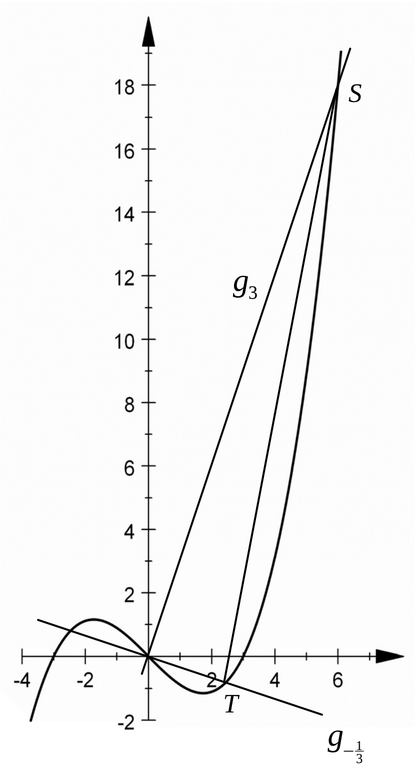
$$= -\frac{9}{4}(m+1)^2.$$

Aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen von *h* zum Ursprung ergibt sich

$A(m) = 4{,}5(m+1)^2$.

(3) Nach c) (2) erhält man die Punkte $S(6\,|\,18)$ und $T\left(\sqrt{6}\,|\,-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$.

(4) Skizze:



[Hinweis: Vom Prüfling wird keine Skalierung der Koordinatenachsen erwartet.]

(5) O sei der Ursprung. Die Geraden OS und OT sind orthogonal. Der Flächeninhalt des Dreiecks OST beträgt dann $A_{\text{d}} = 0{,}5 \cdot \sqrt{6^2 + 18^2} \cdot \sqrt{6 + \frac{2}{3}} = 10\sqrt{6}$ [FE].

Mit Hilfe von d) (2) erhält man für den gesuchten Flächeninhalt
$A = \frac{1}{2} \cdot A(3) - \frac{1}{2} \cdot A\left(-\frac{1}{3}\right) - 10\sqrt{6} = 35 - 10\sqrt{6} \approx 10{,}5$ [FE].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Gleichung der Funktion *f*.	6
2	(2) berechnet die Nullstellen der Funktion *f*.	4
3	(3) untersucht, ob einer der Extrempunkte der Funktion *f* auf der Tangente im Wendepunkt liegt.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt den Streckfaktor k.	6
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Funktion h.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) beweist die Behauptung aus der Aufgabenstellung.	6
2	(2) weist nach, dass die Schnittpunkte der Geraden g_m und des Graphen von h die angegebenen Koordinaten haben.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) erstellt eine geeignete Skizze für $m = -\frac{1}{3}$.	2
2	(2) zeigt die Behauptung aus der Aufgabenstellung.	6
3	(3) ermittelt die Koordinaten der Punkte S und T.	2
4	(4) stellt die Gerade g_3 und die Strecke $\overline{ST}$ in der Skizze aus d) (1) dar.	2
5	(5) bestimmt den Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Gleichung …	6			
2	(2) berechnet die Nullstellen …	4			
3	(3) untersucht, ob einer …	6			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Streckfaktor *k*.	6			
2	(2) bestimmt eine Gleichung …	2			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beweist die Behauptung …	6			
2	(2) weist nach, dass …	3			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erstellt eine geeignete …	2			
2	(2) zeigt die Behauptung …	6			
3	(3) ermittelt die Koordinaten …	2			
4	(4) stellt die Gerade …	2			
5	(5) bestimmt den Inhalt …	5			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(9\,|\,-4\,|\,-2)$, $B(-3\,|\,8\,|\,-2)$, $C(-3\,|\,-4\,|\,10)$, $P(3\,|\,2\,|\,4)$ und $Q(-2\,|\,-3\,|\,-1)$ gegeben.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.*

(2) *Berechnen Sie je eine Gleichung der Ebene E_{ABC}, die A, B und C enthält, in Parameter- und Koordinatenform.*
[Zur Kontrolle: $E_{\mathrm{ABC}}:\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$] (11 Punkte)

b) Der Punkt $S(1\,|\,0\,|\,2)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*.

Zeigen Sie, dass die Gerade g, die durch P und Q verläuft, die Ebene E_{ABC} in S senkrecht schneidet. *(9 Punkte)*

c) Das Dreieck *ABC* soll Seitenfläche eines **regelmäßigen**[1] Tetraeders *ABCD* sein.

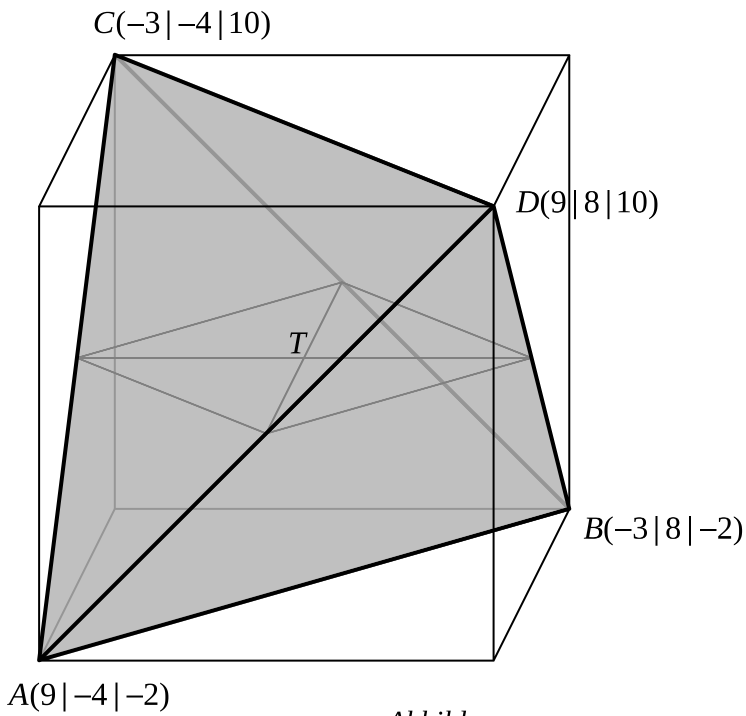
(1) *Bestimmen Sie die beiden Punkte der Geraden g aus Teilaufgabe b), die als vierter Eckpunkt D des Tetraeders ABCD in Frage kommen.*

Das regelmäßige Tetraeder *ABCD* mit $D(9\,|\,8\,|\,10)$ als viertem Eckpunkt ist einem Würfel einbeschrieben, wie in der Abbildung auf Seite 2 dargestellt.

(2) *Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC} und das Volumen des Tetraeders ABCD.* (15 Punkte)

[1] Alle vier Flächen eines **regelmäßigen** Tetraeders sind **gleichseitige** Dreiecke.

Name: ____________________



Abbildung

d) (1) *Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte* M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} *und* M_{CA} *der Strecken* $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ *und* $\overline{CA}$ *an.*

(2) *Zeigen Sie, dass das Viereck* $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ *ein Quadrat ist.*

(3) Der Punkt $T(3\,|\,2\,|\,4)$ ist der Mittelpunkt des Quadrates $M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}$.

Ermitteln Sie den Abstand dieses Punktes T von der Kante $\overline{CD}$ *des Tetraeders.*

(15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ [LE].

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Richtungs-

vektoren der Ebene E_{ABC}. Eine Parametergleichung ist

$$E_{\text{ABC}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r,s \in \mathbb{R}.$$

Eliminierung der Parameter:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcrrr} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_2 & = & -4 & +r & -s \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccrrr} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 & & \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right|$$

Koordinatenform: $E_{\text{ABC}}: x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Modelllösung b)

Es gilt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$.

$S \in E_{\text{ABC}}$, da 1 + 0 + 2 = 3 gilt.

$S \in g$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wahr ist für $r = -2$.

[Eine mögliche Alternative ist die Berechnung des Schnittpunktes von E_{ABC} und *g*.]

Da ein Normalenvektor von E_{ABC} identisch zu einem Richtungsvektor von *g* ist, schneidet *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht.

Modelllösung c)

(1) In einem gleichseitigen Dreieck ist der Schwerpunkt von den Eckpunkten gleich weit entfernt. Da *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, ist jeder Punkt auf *g* von den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt (Satz des Pythagoras). Deswegen ist ein möglicher Ansatz zur Berechnung der Koordinaten des (der) gesuchten Punkte(s) *D*:

$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$. Mit $D = (3+r\,|\,2+r\,|\,4+r)$ erhält man

$\sqrt{(r-6)^2+(r+6)^2+(r+6)^2} = \sqrt{288} \Leftrightarrow 3r^2+12r+108 = 288 \Leftrightarrow r = 6 \vee r = -10$.

Die gesuchten Punkte sind: $D_1(9\,|\,8\,|\,10)$ $[= D]$ und $D_2(-7\,|\,-8\,|\,-6)$.

(2) Für den Abstand *d* des Punktes *D* von der Ebene E_{ABC} ergibt sich:

Da *D* auf *g* liegt und *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, gilt $d(D, E_{\text{ABC}}) = |\overrightarrow{DS}|$.

$$|\overrightarrow{DS}| = \left|\begin{pmatrix}-8\\-8\\-8\end{pmatrix}\right| = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ [LE].}$$

Für das Volumen des Tetraeders gilt: $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot A_{\Delta\text{ABC}}\cdot d(D, E_{\text{ABC}})$.

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks *ABC* erhält man:

$$A_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|^2}{4}\cdot\sqrt{3} = \frac{288}{4}\cdot\sqrt{3} = 72\cdot\sqrt{3}\,. \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 72\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3} = 576 \text{ [VE].}$$

Modelllösung d)

(1) [Die Koordinaten der Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} sind jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte des Tetraeders.]

$M_{AD}(9|2|4)$, $M_{DB}(3|8|4)$, $M_{BC}(-3|2|4)$ und $M_{CA}(3|-4|4)$

(2) Die Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} liegen alle in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 4$.

Es gilt: $\overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{DB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{BC}M_{CA}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{CA}M_{AD}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\left|\overline{M_{AD}M_{DB}}\right| = \left|\overline{M_{DB}M_{BC}}\right| = \left|\overline{M_{BC}M_{CA}}\right| = \left|\overline{M_{CA}M_{AD}}\right| = 6\sqrt{2}$ [LE] ist das Viereck $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ eine Raute, wegen $\overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} \cdot \overrightarrow{M_{DB}M_{BC}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} \perp \overrightarrow{M_{DB}M_{BC}}$ ein Quadrat.

(3) Der Punkt $T(3|2|4)$ ist als Mittelpunkt des Quadrates $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ zugleich der Mittelpunkt des Würfels und liegt daher [lotrecht] unter dem Mittelpunkt $M_{CD}(3|2|10)$ der Würfelseitendiagonalen $\overline{CD}$.

Deswegen ist der Abstand des Punktes *T* von der Tetraederkante $\overline{CD}$ gleich dem Abstand des Punktes *T* von deren Mittelpunkt M_{CD}: $|\overrightarrow{TM_{CD}}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 6$ [LE].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt rechnerisch, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.	5
2	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Parameterform.	3
3	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Koordinatenform.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	zeigt, dass S auf der Geraden g und in der Ebene E_{ABC} liegt.	5
2	zeigt, dass g die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Punkte der Geraden g, die als vierter Eckpunkt D des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ in Frage kommen.	5
2	(2) berechnet den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC}.	4
3	(2) berechnet das Volumen des Tetraeders $ABCD$.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) gibt die Koordinaten der Streckenmittelpunkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} an.	5
2	(2) zeigt, dass das Viereck $M_{\text{AD}}M_{\text{DB}}M_{\text{BC}}M_{\text{CA}}$ ein Quadrat ist.	5
3	(3) ermittelt den Abstand dieses Punktes T von der Kante $\overline{CD}$ des Tetraeders.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
3	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass S …	5			
2	zeigt, dass g …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Punkte …	5			
2	(2) berechnet den Abstand …	4			
3	(2) berechnet das Volumen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten …	5			
2	(2) zeigt, dass das …	5			
3	(3) ermittelt den Abstand …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Punkte $A(1|2)$, $B(-3|2)$ und $C(-1|4)$ sowie die Abbildung f durch die Gleichung $f(\vec{x}) = M \cdot \vec{x}$ mit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) Die Bildpunkte der Punkte A und B bezüglich der Abbildung f seien gegeben durch $A'(10|11)$ und $B'(-6|-1)$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Matrix M der Abbildung f.

[Zur Kontrolle: $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$] (8 Punkte)

b) Gegeben ist zusätzlich die Gerade $h: \vec{x} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

(1) *Zeigen Sie, dass alle Punkte der Geraden h durch f auf sich selbst abgebildet werden.*

(2) *Skizzieren Sie die Gerade h sowie die Punkte A, B, A', B' in einem kartesischen Koordinatensystem.*

(3) *Beschreiben Sie die geometrische Wirkung der Abbildung, indem Sie darstellen, wie die Bildpunkte A', B' aus den Punkten A, B durch eine geometrische Konstruktion gefunden werden können.*

(13 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes* C'.

(3) *Zeigen Sie, dass das Bilddreieck* $A'B'C'$ *bezüglich der Abbildung f rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist.* (16 Punkte)

d) Gegeben sei die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, a \in I\!R$.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Bildgeraden* g' *von g bezüglich der Abbildung* f *und untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g und* g'.

(2) *Zeigen Sie: Ist eine Gerade zu g parallel, so ist ihr Bild bezüglich der Abbildung* f *ebenfalls parallel zu g.*

(13 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für *n* > 2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a + 2b = 10 \\ c + 2d = 11 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -3a + 2b = -6 \\ -3c + 2d = -1 \end{matrix}$$

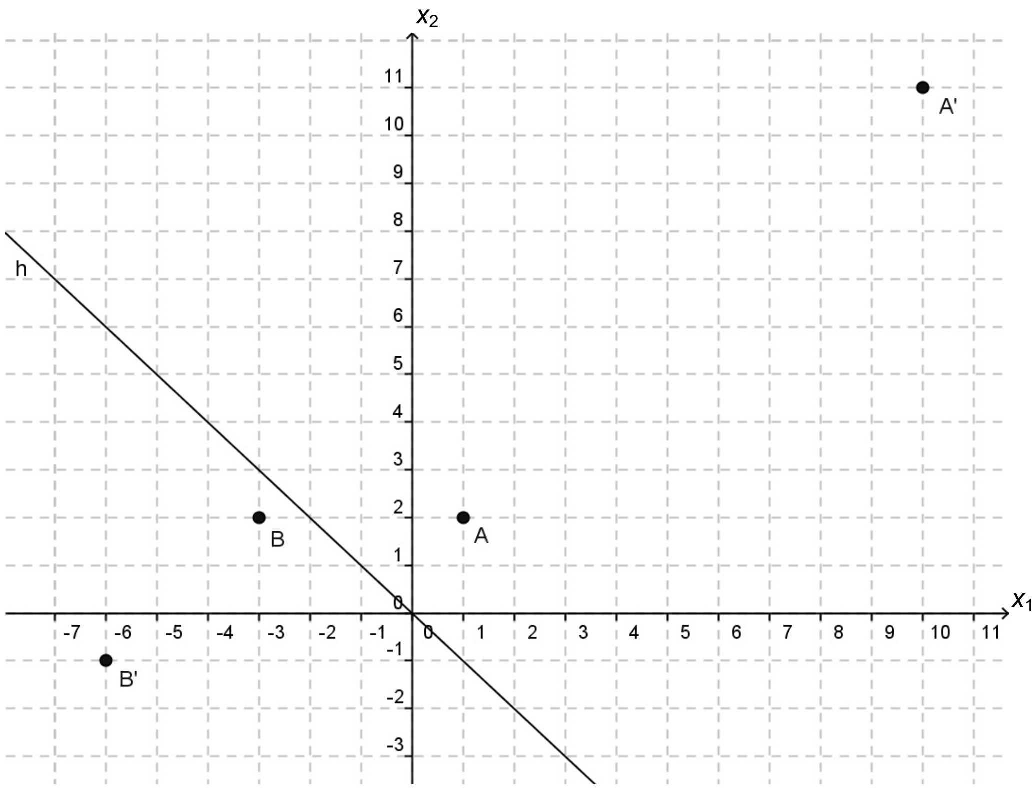
$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 10 - 2b \\ -3 \cdot (10 - 2b) + 2b = -6 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} b = 3 \\ a = 4 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} c = 11 - 2d \\ -3 \cdot (11 - 2d) + 2d = -1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} d = 4 \\ c = 3 \end{matrix}$$

Damit hat M die angegebene Form.

Modelllösung b)

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow$ Alle Punkte von h werden von f auf sich selbst abgebildet.

(2)



(3) Die Geraden durch A und A' sowie B und B' verlaufen orthogonal zur Geraden h. Der Abstand von B' zu h ist 7-mal so groß wie der Abstand von B zu h; das Gleiche gilt für A' und A. Damit zeichnet man Orthogonalen zu h durch A und B und konstruiert mit dem Zirkel auf diesen Orthogonalen Punkte im siebenfachen Abstand.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.)

Modelllösung c)

(1) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 2 \cdot \sqrt{2}$ und $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Damit ist das Dreieck rechtwinklig und gleichschenklig.

Sein Flächeninhalt beträgt: $A_{\text{Dreieck}} = 0{,}5 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(8\,|\,13)$

(3) $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'C'} = 0.$

Damit sind diese beiden Seiten zueinander orthogonal und damit ist das Bilddreieck rechtwinklig.

Da die Längen der drei Vektoren offensichtlich alle voneinander verschieden sind, ist das Bilddreieck nicht gleichschenklig.

Modelllösung d)

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2+3a \\ -5+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23+21a \\ -26+21a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -26 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ g' und g verlaufen parallel zueinander, da ihre Richtungsvektoren parallel (linear abhängig) sind.

Da der Punkt $P(-23\,|\,-26)$ für $a = -7$ auf der Geraden g liegt, gilt $g' = g$.

(2) Jede zu g parallele Gerade hat einen Richtungsvektor der Form $c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3c \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21c \\ 21c \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Jede zu g parallele Gerade hat eine parallele Bildgerade.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt ein LGS zur Bestimmung von *M*.	4
2	bestimmt rechnerisch die Lösung des LGS und damit *M*.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass alle Punkte von h auf sich selbst abgebildet werden.	3
2	(2) skizziert h, A, A', B, B' in einem kartesischen Koordinatensystem.	4
3	(3) beschreibt die Lage von A, A' und B, B' bezüglich der Orthogonalität zu h **und** gibt eine Konstruktionsmöglichkeit an.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet Verbindungsvektoren der gegebenen Punkte.	2
2	(1) zeigt, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig und gleichschenklig ist.	3
3	(1) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.	3
4	(2) berechnet den Bildpunkt C' .	2
5	(3) berechnet Verbindungsvektoren der Punkte A', B', C' .	3
6	(3) zeigt, dass das Dreieck $A'B'C'$ rechtwinklig, aber nicht gleichschenklig ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt das Bild g' von g.	4
2	(1) untersucht die Lagebeziehung von g und g'.	5
3	(2) zeigt, dass eine zu g parallele Gerade g und ihr Bild g' parallel sind.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_______________________________________ Kursbezeichnung:_____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	ermittelt ein LGS …	4			
2	bestimmt rechnerisch die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………. ……………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass alle …	3			
2	(2) skizziert h, A, A', B, B' …	4			
3	(3) beschreibt die Lage …	6			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………. ……………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet Verbindungsvektoren der …	2			
2	(1) zeigt, dass das …	3			
3	(1) berechnet den Flächeninhalt …	3			
4	(2) berechnet den Bildpunkt C'.	2			
5	(3) berechnet Verbindungsvektoren der …	3			
6	(3) zeigt, dass das …	3			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt das Bild …	4			
2	(1) untersucht die Lagebeziehung …	5			
3	(2) zeigt, dass eine …	4			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliche Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:

20 % der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C,
10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A,
10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte C,
10 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte A,
20 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

Gehen Sie davon aus, dass die übrigen Käufer bei der gewählten Kaffeesorte bleiben und sich das Wechselverhalten über längere Zeit nicht ändert.

a) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm und beschreiben Sie, inwiefern die Übergangsmatrix* $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ *das dargestellte Wechselverhalten der Käufer abbildet.* (8 Punkte)

b) *Berechnen Sie die Verteilung nach einem Monat, wenn vorher 150 000 Sorte A, 300 000 Sorte B und 450 000 Sorte C gekauft haben.* (4 Punkte)

c) *Berechnen Sie* P^2 *und interpretieren Sie die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie die Komponente in der dritten Zeile und dritten Spalte von* P^2 *im Sachzusammenhang.* (6 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Matrix P aus Teil a) hat die besondere Eigenschaft, dass alle Komponenten größer oder gleich Null sind und alle Spalten die Summe 1 haben. Eine solche Matrix wird stochastisch genannt.

Interpretieren Sie diese Eigenschaft im Sachzusammenhang und beurteilen Sie die Angemessenheit der dahinter liegenden Modellannahme für das Wechselverhalten der Käufer zwischen den drei Kaffeesorten. (6 Punkte)

Eine weitere Kaffeerösterei bietet eine vierte Kaffeesorte D an. Das Wechselverhalten der Käufer wird durch die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei eine Verteilung der Käufer auf die Sorten A, B, C und D durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix}$ gegeben ist.

e) (1) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm.*

(2) *Bestimmen Sie für die Übergangsmatrix Q die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.*
Interpretieren Sie diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.

(16 Punkte)

Name: ____________________

f) Durch mangelnde Betreuung der Stammkunden verliert die Rösterei, die Sorte C anbietet, Käufer an die übrigen Röstereien, so dass sich die entsprechenden Übergangsquoten ändern. Alle anderen Übergangsquoten bleiben gleich.

Die Verteilung ändert sich in einem Monat von (400 000|200 000|400 000|100 000) zu (400 000|300 000|200 000|200 000).

(1) *Begründen Sie, dass dieses Verhalten durch eine Matrix des Typs*

$$Q' = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & x & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & y & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0{,}4 \end{pmatrix}$$ *beschrieben werden kann.*

(2) *Ermitteln Sie die neuen Übergangsquoten.* (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

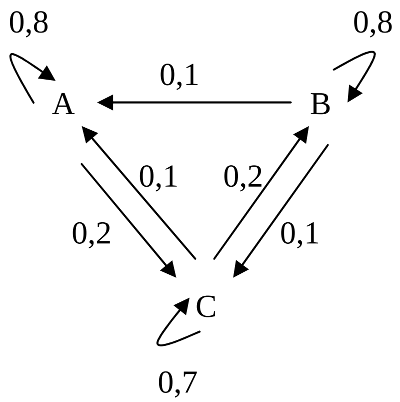
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Übergangsdiagramm:



Begründung: In der Diagonalen stehen die Prozentsätze der Käufer, die bei der Kaffeesorte bleiben, d. h. 80 % bei A, 80 % bei B und 70 % bei C, in der 1. Zeile die Anteile der zu A wechselnden Käufer (10 % von B und 10 % von C), in der 2. Zeile die Anteile der zu B wechselnden Käufer (0 % von A und 20 % von C) und in der 3. Zeile die Anteile der zu C wechselnden Käufer (20 % von A und 10 % von B).

Modelllösung b)

Aus der Ausgangsverteilung $\vec{x}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix}$ ergibt sich nach einem Monat die Verteilung

$$\vec{x}_{\mathrm{E}} = P \cdot \vec{x}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195000 \\ 330000 \\ 375000 \end{pmatrix}.$$

Modelllösung c)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}04 & 0{,}66 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}17 & 0{,}53 \end{pmatrix}$$

Die Komponente 0,3 in der dritten Zeile und ersten Spalte besagt im Sachzusammenhang, dass innerhalb von zwei Monaten 30 % der Käufer von A zu C wechseln.
Die Komponente 0,53 in der dritten Zeile und dritten Spalte besagt im Sachzusammenhang, dass nach zwei Monaten 53 % der Käufer bei C geblieben sind.

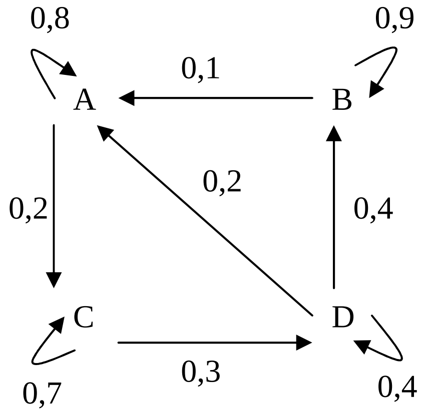
Modelllösung d)

Spaltensumme 1: Alle Käufer bleiben bei der Kaffeesorte bzw. wechseln zu einer der beiden anderen Sorten. Keiner verlässt das „System“ und niemand kommt hinzu. Es handelt sich um einen Austauschprozess.

Modellkritik: Die Annahme eines geschlossenen Systems ist nicht realistisch, da ausscheidende Kaffeekäufer (Tod, Änderung der bevorzugten Getränkeart etc.) ebenso wenig berücksichtigt werden wie neu hinzukommende.

Modelllösung e)

(1) Übergangsdiagramm:



(2) Gesucht ist hier eine stationäre Verteilung: $Q \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich als prozentuale Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Langfristig bedeutet das: 30 % aller Käufer kaufen Sorte A, 40 % Sorte B, 20 % Sorte C und 10 % Sorte D.

Modelllösung f)

(1) Neue Matrix: $Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix}$

Da nur Käufer der Sorte C ihr Wechselverhalten ändern, unterscheidet sich die neue Matrix Q' nur in der dritten Spalte von der Matrix Q. Die neuen Wechselquoten von C zu A, B und D werden mit *x*, *y* und *z* bezeichnet, die Quote der bei C bleibenden Käufer ist dann $1-(x+y+z)$.

(2) [Vereinfachte] Ausgangsverteilung: (40|20|40|10)

Verteilung nach einem Monat: (40|30|20|20)

Bestimmung der neuen Übergangsquoten:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 40 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,1 + 40x + 10 \cdot 0,2 = 40 \\ 20 \cdot 0,9 + 40y + 10 \cdot 0,4 = 30 \\ 40 \cdot 0,2 + 40 \cdot (1-(x+y+z)) = 20 \\ 40z + 10 \cdot 0,4 = 20 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{matrix} 20 = 20 \\ x = 0,1 \\ y = 0,2 \\ z = 0,4 \end{matrix}$$

Damit ergibt sich als neue Übergangsmatrix: $Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	skizziert die monatliche Entwicklung in einem Übergangsdiagramm.	4
2	beschreibt, inwiefern die Übergangsmatrix das Wechselverhalten der Käufer abbildet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die Verteilung nach einem Monat.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet P^2.	3
2	interpretiert die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie die Komponente in der dritten Zeile und dritten Spalte von P^2 im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	interpretiert die Eigenschaft im Sachzusammenhang.	3
2	beurteilt die Angemessenheit der Modellannahme.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) skizziert das Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm.	5
2	(2) bestimmt die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.	7
3	(3) interpretiert diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass das angegebene Verhalten durch die Matrix Q' beschrieben werden kann.	3
2	(2) ermittelt die neuen Übergangsquoten.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	skizziert die monatliche …	4			
2	beschreibt, inwiefern die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	4			
sachlich richtige Alternativen: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet P^2.	3			
2	interpretiert die Komponente …	3			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	interpretiert die Eigenschaft …	3			
2	beurteilt die Angemessenheit …	3			
sachlich richtige Alternativen: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) skizziert das Wechselverhalten …	5			
2	(2) bestimmt die prozentuale …	7			
3	(3) interpretiert diese Verteilung …	4			
sachlich richtige Alternativen: (16) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**16**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass das …	3			
2	(2) ermittelt die neuen …	7			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Seit dem 18. März 2009 ist das Aus für die herkömmliche Glühlampe beschlossene Sache. Die EU-Kommission hat in einem bis zum Jahr 2016 angelegten 6-Stufen-Plan den Ersatz von Glühlampen durch Energiesparlampen verordnet.
Ein Großhändler bezieht Energiesparlampen mit einer Energieaufnahme von 11 W von drei unterschiedlichen Herstellern A, B und C, die baugleiche Lampen herstellen. Diese Lampen verpackt er unabhängig vom Hersteller in einer einheitlichen Verpackung und verkauft sie dann weiter.
Nach umfangreichen Prüfzyklen stellt sich heraus, dass 4 % der Energiesparlampen von Hersteller A, 7 % der Lampen von B und 10 % der Lampen von C schon nach 300 Brennstunden deutlich weniger hell leuchten. Zur Vereinfachung werden diese Lampen „Mondlampen“ genannt.

Der Großhändler beliefert regelmäßig einen Supermarkt mit Energiesparlampen: 50 % der Lampen stammen von Hersteller A, 30 % von B und 20 % von C. Im Folgenden sollen die oben genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Mondlampen in den entsprechenden Lieferungen betrachtet werden.

Name: ____________________

a) Ein Kunde kauft eine zufällig ausgewählte Lampe aus dem Supermarkt.

(1) *Stellen Sie den Zufallsversuch „Kunde wählt zufällig eine Lampe“ mit Hilfe eines vollständigen Baumdiagramms grafisch dar.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die gekaufte Lampe*

(2.1) *nicht von Hersteller C stammt,*

(2.2) *eine Mondlampe ist,*
[Kontrollergebnis: 0,061]

(2.3) *keine Mondlampe ist und nicht von Hersteller C stammt.*

(3) Der Kunde stellt nach 300 Betriebsstunden fest, dass seine im Supermarkt gekaufte Lampe eine Mondlampe ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mondlampe von Hersteller A stammt.
Entscheiden Sie, von welchem der drei Hersteller A, B oder C sie am wahrscheinlichsten geliefert wurde. (19 Punkte)

b) (1) Ein Kunde kauft 50 Lampen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 2 Mondlampen darunter sind, wenn die Lampen alle aus einer Lieferung von Hersteller A stammen.

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die erwartete Anzahl von Mondlampen darunter sind, wenn die Lampen alle aus einer Lieferung von Hersteller B stammen.*

(3) *Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Lampen, die ein Kunde im Supermarkt kaufen kann, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % keine Mondlampe darunter ist, wenn alle Lampen aus einer Lieferung von Hersteller C stammen.*
(13 Punkte)

Name: ____________________

Ein Mitarbeiter bei Hersteller B führt auf eigene Initiative eine Änderung in der Produktion durch; er stellt dazu eine Maschine neu ein. Er behauptet, dass so der Anteil der Mondlampen auf unter 7 % gesenkt würde.

c) Um dies nachzuweisen, werden 200 Lampen zufällig aus der Produktion entnommen und es wird untersucht, wie viele Mondlampen darunter sind. Hersteller B bestimmt zur Hypothese $H_0 : p \geq 7\ \%$ folgende Entscheidungsregel:
H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn die Anzahl der Mondlampen in der Stichprobe höchstens 7 beträgt.

(1) *Begründen Sie die Wahl der Hypothese im Sachzusammenhang.*
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art und zeigen Sie, dass die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ *optimal geeignet ist.*

(2) Der Hersteller will seinem Mitarbeiter eine Belohnung zahlen, wenn der Hypothesentest aus (1) eine Senkung des Anteils der Mondlampen anzeigt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mitarbeiter irrtümlich keine Belohnung erhält, obwohl der Anteil der Mondlampen tatsächlich auf 6,5 % gesenkt wurde. Beurteilen Sie hiermit das Ergebnis des Tests aus der Sicht des Mitarbeiters.

(18 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

(*p* über und unter der Tabelle)

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	k	n
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5 = p	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,06	0,065	0,07	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0018	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0064	0,0030	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0177	0,0090	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0413	0,0225	0,0119	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0829	0,0485	0,0274	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,1470	0,0922	0,0556	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,2343	0,1570	0,1010	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,3407	0,2430	0,1661	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,4580	0,3463	0,2508	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,5760	0,4594	0,3513	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,6849	0,5731	0,4606	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,7777	0,6787	0,5705	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,8512	0,7697	0,6731	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,9054	0,8428	0,7623	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,9429	0,8979	0,8351	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,9672	0,9368	0,8907	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,9821	0,9627	0,9308	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,9907	0,9790	0,9582	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,9953	0,9887	0,9758	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,9978	0,9942	0,9866	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,9990	0,9971	0,9929	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,9996	0,9986	0,9964	0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,9998	0,9994	0,9982	0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9999	0,9997	0,9992	0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9999	0,9996	0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28					0,9998	0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29					0,9999	0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30						0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31						0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32						0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33						0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34						0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35						0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36						0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37						0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38							0,8369	0,4019	161	
	39							0,8777	0,4718	160	
	40							0,9106	0,5422	159	
	41							0,9362	0,6108	158	
	42							0,9556	0,6758	157	
	43							0,9699	0,7355	156	
	44							0,9801	0,7887	155	
	45							0,9872	0,8349	154	
	46							0,9919	0,8738	153	
	47							0,9950	0,9056	152	
	48							0,9970	0,9310	151	
	49							0,9983	0,9506	150	
	50							0,9990	0,9655	149	
	51							0,9995	0,9764	148	
	52							0,9997	0,9843	147	
	53							0,9998	0,9897	146	
	54							0,9999	0,9934	145	
	55								0,9959	144	
	56								0,9975	143	
	57								0,9985	142	
	58								0,9991	141	
	59								0,9995	140	
	60								0,9997	139	
	61								0,9998	138	
	62								0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,94	0,935	0,93	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
		p									

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

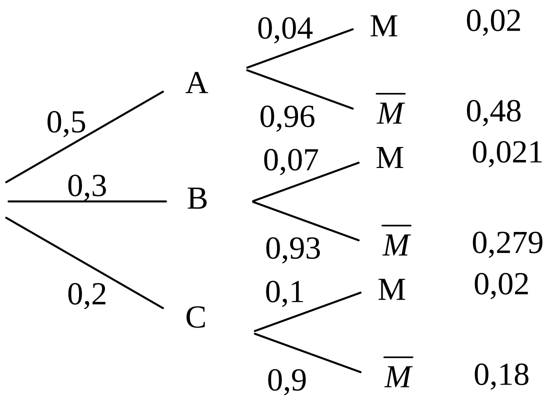
6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Bezeichne mit A das Ereignis: „Lampe ist von Hersteller A“, B, C analog,

M: „Lampe ist eine Mondlampe“, $\overline{M}$ bezeichne das Gegenereignis.



(2.1) $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0,8$

(2.2) $P(M) = 0,02 + 0,021 + 0,02 = 0,061$

(2.3) $P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 0,48 + 0,279 = 0,759$

(3) $P_{\mathrm{M}}(A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(M)} = \dfrac{0,02}{0,061} = \dfrac{20}{61} \approx 0,3279 = 32,79\ \%$

Gesucht: Der Hersteller $H \in \{A, B, C\}$, für den $P_{\mathrm{M}}(H) = \dfrac{P(M \cap H)}{P(M)}$ maximal wird.

Das Maximum ist für $H = B$ erreicht, da $P(M \cap H)$ für diese Setzung maximal wird.

Modelllösung b)

Bezeichne X die Anzahl der Mondlampen, wenn ein Kunde n Lampen kauft. Dann ist X binomialverteilt, mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Stichprobenumfang n.

(1) $n = 50$, $p = 0,04$

$$P(X \le 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{50}{i} \cdot 0,04^{i} \cdot 0,96^{50-i} \approx 0,6767 = 67,67\ \%$$

(2) Hier sind $n = 50$ und $p = 0,07$. Für den Erwartungswert gilt: $\mu = 50 \cdot 0,07 = 3,5$.

Damit folgt

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{50}{i} \cdot 0,07^{i} \cdot 0,93^{50-i} \approx 0,4673 = 43,73\ \%.$$

(3) p = 0,1. Gesucht ist ein maximales n, für das gilt: $P(X=0)\geq 0{,}5$.

$$P(X=0)\geq 0{,}5 \Leftrightarrow (1-0{,}1)^n \geq 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}9^n \geq 0{,}5 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)} \approx 6{,}58$$

Man darf also maximal 6 Lampen kaufen.

Modelllösung c)

(1) Der Hersteller will prüfen, ob die Änderung des Mitarbeiters zu einer Senkung des Anteils von Mondlampen geführt hat. Dabei will er mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit irrtümlich von einer Verbesserung (p < 7 %) ausgehen, wenn sich tatsächlich nichts geändert hat $(p \geq 0{,}07)$. Daher ist als Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}07$ zu wählen.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Mondlampen in der Stichprobe von 200 Lampen an. Wird H_0 als gültig angenommen, so kann X als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit p = 7 % und Stichprobenanzahl n = 200.

Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann:

$$P_{\mathrm{p}=0{,}07}(X \leq 7) = \sum_{i=0}^{7} \binom{200}{i} \cdot 0{,}07^i \cdot 0{,}93^{200-i} \approx 0{,}0274 = 2{,}74\,\%.$$

Aufgrund der H_0-Hypothese handelt es sich um einen linksseitigen Hypothesentest.

Zusätzlich gilt:

$$P_{\mathrm{p}=0{,}07}(X \leq 8) = \sum_{i=0}^{8} \binom{200}{i} \cdot 0{,}07^i \cdot 0{,}93^{200-i} \approx 0{,}0556 = 5{,}56\,\% > 5\,\%.$$

Also ist die Entscheidungsregel für das gegebene Signifikanzniveau optimal geeignet.

(2) Es ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art zu berechnen. Daher ist $p = 0{,}065$ und gesucht ist $P(X \geq 8)$.

Hierfür gilt:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{i=0}^{7} \binom{200}{i} \cdot 0{,}065^i \cdot 0{,}935^{200-i} \approx 1 - 0{,}0485 = 95{,}15\,\%.$$

Da die Absenkung auf 6,5 % noch zu dicht bei 7 % liegt und der Stichprobenumfang noch zu klein ist, wird mit einer hohen Wahrscheinlichkeit irrtümlicherweise keine Belohnung ausgezahlt. Der Test ist also aus Sicht des Mitarbeiters als ungünstig einzustufen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) stellt den Versuch mit einem Baumdiagramm dar.	6
2	(2.1) berechnet *P*(„Lampe stammt nicht von Hersteller C“).	2
3	(2.2) berechnet *P*(„Lampe ist Mondlampe“).	2
4	(2.3) berechnet *P*(„keine Mondlampe und nicht von Hersteller C“).	3
5	(3) ermittelt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	3
6	(3) entscheidet begründet, dass die Lampe am wahrscheinlichsten von B stammt.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) berechnet den Erwartungswert und bestimmt damit die Wahrscheinlichkeit.	4
3	(3) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Anzahl.	3
4	(3) berechnet die gesuchte Anzahl.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet die Wahl der Hypothese.	3
2	(1) bestimmt die gesuchte Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art.	3
3	(1) begründet die Eignung der Entscheidungsregel.	4
4	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	4
5	(2) beurteilt das Ergebnis des Tests für den Mitarbeiter.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Versuch …	6			
2	(2.1) berechnet P(„Lampe …	2			
3	(2.2) berechnet P(„Lampe …	2			
4	(2.3) berechnet P(„keine …	3			
5	(3) ermittelt die gesuchte …	3			
6	(3) entscheidet begründet, dass …	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**19**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte …	3			
2	(2) berechnet den Erwartungswert …	4			
3	(3) ermittelt einen Ansatz …	3			
4	(3) berechnet die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet die Wahl …	3			
2	(1) bestimmt die gesuchte …	3			
3	(1) begründet die Eignung …	4			
4	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	4			
5	(2) beurteilt das Ergebnis …	4			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle für den deutschen Fiskus. Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an unversteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigarettenschachteln in bundesweit 22 Verwertungsstellen des dualen Systems gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbanderolen überprüft.

a) In einer süddeutschen Großstadt hatten 10,7 % der Zigarettenschachteln keine Steuerbanderole. Im Folgenden soll diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

   (1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigarettenschachteln*

      (1.1) *genau 4 Schachteln keine Steuerbanderole haben,*

      (1.2) *mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbanderole hat,*

      (1.3) *mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbanderole haben.*

   (2) Bestimmen Sie, wie viele Zigarettenschachteln man in der Entsorgungsstation mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole erhält. (15 Punkte)

Name: ____________________

b) In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.*

(2) *Bestimmen Sie (z. B. durch systematisches Probieren) die Anzahl der Stangen, die der Zoll mindestens hätte entnehmen müssen, damit diese Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % beschlagnahmt worden wäre.* (10 Punkte)

c) Um einen Überblick über den Steuerausfall durch unverzollte Zigaretten zu bekommen, soll in einer Stadt nach folgendem Verfahren vorgegangen werden:
Es werden 200 leere Zigarettenschachteln markiert und in öffentlichen Mülltonnen entsorgt. Nach einem Tag sind diese Schachteln in der Entsorgungsstation angekommen. Aus dem an diesem Tag angelieferten Hausmüll werden 1000 leere Zigarettenschachteln zufällig ausgewählt. Die Anzahlen unverzollter, verzollter und markierter Zigarettenschachteln werden durch Auszählen ermittelt:

unverzollt	verzollt	markiert
146	840	14

(1) *Bestimmen Sie aus den obigen Daten eine Schätzung für die Anzahl aller unverzollten Schachteln, die an diesem Tag in der Entsorgungsstation angeliefert wurden. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.*

(2) *Berechnen Sie auf der Grundlage von (1) eine Schätzung für den Steuerausfall, der dem Staat durch die unverzollten Zigaretten an diesem Tag entstanden ist, wenn zugrunde gelegt wird, dass pro Schachtel Zigaretten im Durchschnitt 2,73 € Steuern bezahlt werden müssen.* (10 Punkte)

Name: ____________________

d) In einer großen Hafenstadt werden 200 leere Zigarettenschachteln zufällig dem Hausabfall entnommen und untersucht. Dabei werden 22 unverzollte Schachteln gefunden.

(1) *Bestimmen Sie aufgrund der Stichprobe ein 90 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p der unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall.*

(2) Im Vorjahr lag der Anteil der unverzollten Zigarettenschachteln in der Hafenstadt bei 8,1 %. Auf Grundlage der obigen Stichprobe soll eine Pressemeldung herausgegeben werden, ob sich im aktuellen Jahr dieser Anteil verringert oder erhöht hat oder ob er gleich geblieben ist.

Entscheiden Sie mit Hilfe des in (1) ermittelten Konfidenzintervalls, welche der Pressemeldungen sinnvollerweise veröffentlicht werden kann. *(15 Punkte)*

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0}p^0\left(1-p\right)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$$

						p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5 = *p*	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

				p				
n	k	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2		n
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27			0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28			0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29			0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30			0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33			0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34			0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35			0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36			0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37			0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38				0,8369	0,4019	161	
	39				0,8777	0,4718	160	
	40				0,9106	0,5422	159	
	41				0,9362	0,6108	158	
	42				0,9556	0,6758	157	
	43				0,9699	0,7355	156	
	44				0,9801	0,7887	155	
	45				0,9872	0,8349	154	
	46				0,9919	0,8738	153	
	47				0,9950	0,9056	152	
	48				0,9970	0,9310	151	
	49				0,9983	0,9506	150	
	50				0,9990	0,9655	149	
	51				0,9995	0,9764	148	
	52				0,9997	0,9843	147	
	53				0,9998	0,9897	146	
	54				0,9999	0,9934	145	
	55					0,9959	144	
	56					0,9975	143	
	57					0,9985	142	
	58					0,9991	141	
	59					0,9995	140	
	60					0,9997	139	
	61					0,9998	138	
	62					0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	k	n
				p				

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der unverzollten Zigarettenschachteln in der Stichprobe von 40 Schachteln. Dann ist X binomialverteilt mit $p = 0{,}107$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

(1.1) $P(X=4)=\binom{40}{4}\cdot 0{,}107^4\cdot 0{,}893^{36}\approx 0{,}2037=20{,}37\,\%$

(1.2) $E(X)=0{,}107\cdot 40=4{,}28$

$P(X>4{,}28)=P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)$

$=1-\sum_{k=0}^{4}\binom{40}{k}\cdot 0{,}107^k\cdot 0{,}893^{40-k}$

$\approx 1-0{,}5713=0{,}4287=42{,}87\,\%$

(1.3) $P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=\binom{40}{3}\cdot 0{,}107^3\cdot 0{,}893^{37}+\binom{40}{4}\cdot 0{,}107^4\cdot 0{,}893^{36}+\binom{40}{5}\cdot 0{,}107^5\cdot 0{,}893^{35}$

$\approx 0{,}5633=56{,}33\,\%$

(2) Die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe der Größe n mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole zu finden, beträgt:

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}893^n$.

Das gesuchte n erhält man also mit dem Ansatz:

$1-0{,}893^n\geq 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}893^n\leq 0{,}2 \Leftrightarrow n\geq \log_{0{,}893}(0{,}2)\approx 14{,}22$.

Man muss also mindestens 15 Schachteln einsammeln.

Modelllösung b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 5 ausgewählten Zigarettenstangen keine unverzollten Stangen befinden, beträgt

$\frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} \approx 0,6532 = 65,32\,\%.$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 1 – 0,6532 = 0,3468 = 34,68 %.

(2) Die Lösung wird durch Probieren ermittelt; die Wahrscheinlichkeiten werden nach demselben Muster wie in (1) bestimmt.

Testet der Zoll 6 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 40,18 %.

Testet der Zoll 7 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 45,27 %.

Testet der Zoll 8 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 49,98 %.

Testet der Zoll 9 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 54,33 %.

Der Zoll müsste also mindestens 9 Stangen testen.

Modelllösung c)

(1) Es ist plausibel anzunehmen, dass die Anteile der jeweiligen in der Stichprobe gefundenen Zigarettenschachteln an der Gesamtzahl der Zigarettenschachteln bei den drei „Arten“ von Schachteln (verzollt, unverzollt, markiert) näherungsweise gleich groß sind, da sich jede Schachtel unabhängig von ihrer „Art“ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe befindet. Da sich 14 markierte Schachteln in der Stichprobe befinden, d. h. 7 % aller markierten Schachteln, kann man also näherungsweise annehmen, dass 146 auch 7 % aller unverzollten Schachteln sind. Die Anzahl der unverzollten Schachteln beträgt demnach schätzungsweise: $146 / 0,07 \approx 2086$.

(2) Dem Staat entgehen ca. $\frac{146}{0,07} \cdot 2,73\text{ €} = 5694\text{ €}$ an Steuern.

(Wenn mit 2086 gerechnet wird, sind es 5694,78 €.)

Modelllösung d)

(1) Es bezeichne *p* den Anteil der unverzollten Schachteln. Es bezeichne *X* die Anzahl der unverzollten Zigarettenschachteln in einer Stichprobe von 200 Schachteln, die in der Hafenstadt eingesammelt werden. Dann kann *X* als binomialverteilt angenommen werden (mit unbekanntem $p,\ n = 200,\ \mu = 200p,\ \sigma = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$.

Für das kleinste *p*, welches mit dem Ergebnis *x* = 22 verträglich ist, gilt:

$\mu + 1{,}64\sigma = 22$, d. h. $p + 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} = \frac{22}{200}$ bzw. $p - \frac{22}{200} = -1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200}$.

Für das größte *p*, welches mit dem Ergebnis *x* = 22 verträglich ist, gilt:

$\mu - 1{,}64\sigma = 22$, d. h. $p - 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} = \frac{22}{200}$ bzw. $p - \frac{22}{200} = 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200}$.

Insgesamt lassen sich die beiden Gleichungen zusammenfassen zu:

$$\left| p - \frac{22}{200} \right| = 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} .$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\left(p - \frac{22}{200} \right)^2 = 1{,}64^2 \cdot \frac{\sigma^2}{200^2} = 1{,}64^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{200} .$$

Diese Gleichung löst man nach *p* auf:

$$p^2 - 0{,}22p + 0{,}11^2 = \frac{1{,}64^2}{200} p(1-p)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}22p + 0{,}11^2 = \frac{1{,}64^2}{200} p - \frac{1{,}64^2}{200} p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 \cdot \left(1 + \frac{1{,}64^2}{200} \right) + \left(-0{,}22 - \frac{1{,}64^2}{200} \right) p + 0{,}11^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}23035p + 0{,}0119394 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0{,}115175 - \sqrt{0{,}115175^2 - 0{,}0121} \approx 0{,}0788 = 7{,}88\ \%$$

$$\textit{oder} \quad p = 0{,}115175 + \sqrt{0{,}115175^2 - 0{,}01194} \approx 0{,}1516 = 15{,}16\ \%$$

Also erhält man als Konfidenzintervall: K = [0,0788;0,1516].

(2) Der Wert 0,081 befindet sich innerhalb des in (1) bestimmten Konfidenzbereichs. Daher kann man die Pressemitteilung, dass sich der Anteil unverzollter Schachteln erhöht oder verringert hat, nicht aufgrund dieses Konfidenzintervalls treffen.
Die Pressemitteilung „der Wert ist gleich geblieben" ist allerdings ebenfalls nicht gerechtfertigt, da das Konfidenzintervall Werte bis zu 15 % als mit der Stichprobe verträglich feststellt, und diese Werte liegen erheblich oberhalb des Vorjahreswertes von 8,1 %.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1.1) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	2
2	(1.2) berechnet den Erwartungswert und berechnet hiermit die Wahrscheinlichkeit.	4
3	(1.3) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	4
4	(2) bestimmt die gesuchte minimale Anzahl der Schachteln.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.	5
2	(2) bestimmt durch systematisches Probieren die Anzahl der Stangen mit einer Wahrscheinlichkeit für die Beschlagnahmung von mindestens 50 %.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Schätzung für die Anzahl der unverzollten Schachteln.	4
2	(1) erläutert die gewählte Vorgehensweise.	4
3	(2) berechnet den Steuerausfall.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt die quadratische Gleichung und bestimmt damit das Konfidenzintervall.	10
2	(2) entscheidet sich begründet gegen die Aussagen.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1.1) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(1.2) berechnet den Erwartungswert …	4			
3	(1.3) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	4			
4	(2) bestimmt die gesuchte …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit …	5			
2	(2) bestimmt durch systematisches …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Schätzung …	4			
2	(1) erläutert die gewählte …	4			
3	(2) berechnet den Steuerausfall.	2			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die quadratische …	10			
2	(2) entscheidet sich begründet …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0