Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In einem Labor wird ein (Probe-)Körper auf 100 °C erhitzt und anschließend bei konstanter Raumtemperatur von 20 °C abgekühlt. Seine Temperatur während des Abkühlens wird durch die Funktion T mit der Gleichung

$$T(t) = 20 + 80 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}, \; t \geq 0,$$

beschrieben (t in Sekunden, $T(t)$ in °C). *Abbildung 1* zeigt den Graphen der Funktion T.

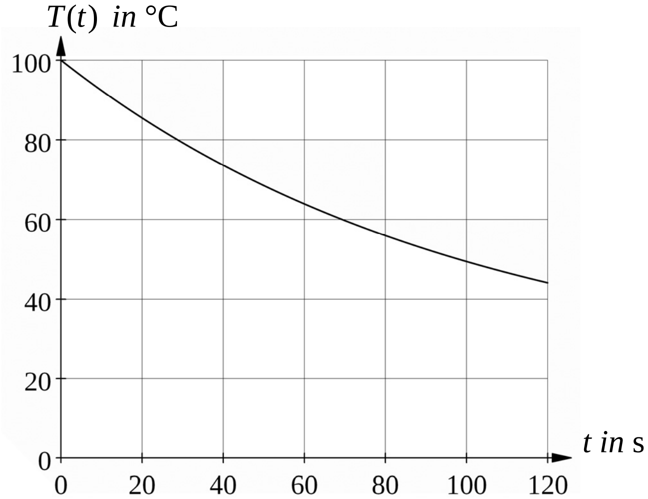


Abbildung 1

a) (1) *Beschreiben Sie den Verlauf des in Abbildung 1 dargestellten Funktionsgraphen von T im Sachzusammenhang.*

(2) *Berechnen Sie die Temperatur, auf die der Körper nach der Zeit* $t = 120\text{ s}$ *abgekühlt ist.*

(3) *Prüfen Sie die Entwicklung der Temperatur des Körpers für große t.* (10 Punkte)

Name: ____________________

b) Durch $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)\mathrm{d}t$ ist die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb eines Zeitintervalls $[t_1;t_2]$, $0 \le t_1 < t_2$, gegeben.

(1) *Weisen Sie nach, dass die mittlere Temperatur des Körpers im Zeitintervall* $[t_1;t_2]$, $0 \le t_1 < t_2$, *durch* $\frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left(20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01 \cdot t_2} - e^{-0,01 \cdot t_1})\right)$ *berechnet werden kann.*

(2) *Berechnen Sie die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.* (10 Punkte)

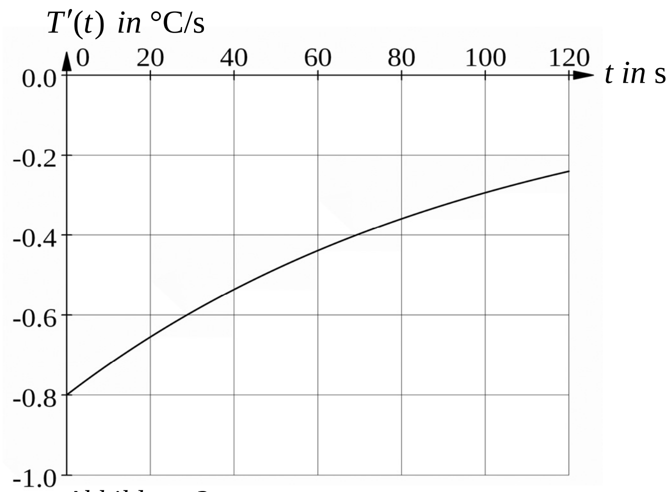


Abbildung 2

c) Die *Abbildung 2* zeigt den Graphen der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers.
Es gilt $T'(t) = -0,8 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$, $t \ge 0$.

(1) *Begründen Sie qualitativ die Eigenschaften des Funktionsgraphen von T in Abbildung 1 mit den Eigenschaften des in Abbildung 2 dargestellten Graphen der Funktion* T'.

(2) *Geben Sie an und begründen Sie, zu welchem Zeitpunkt des Zeitintervalls* $[0;120]$ *der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.*

Name: ____________________

(3) Der Graph der Funktion T' und die t-Achse schließen im Intervall $[0;120]$ ein Flächenstück ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im Sachzusammenhang.

(4) *Ermitteln Sie die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.* (18 Punkte)

d) (1) *Bestimmen Sie die* ***mittlere Änderungsrate*** *der Abkühlungsgeschwindigkeit T' des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.*

[Zur Kontrolle: Der gesuchte Wert ist ungefähr $0{,}00466\ °\mathrm{C/s}^2$]

(2) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt des Abkühlungsvorgangs, zu dem die* ***momentane Änderungsrate*** *der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers den Wert der mittleren Änderungsrate seiner Abkühlungsgeschwindigkeit aus (1) hat.* (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Der Graph ist streng monoton fallend und linkgekrümmt: Die Temperatur des Körpers nimmt ausgehend von $T_0 = 100\ °\text{C}$ ständig ab. Die Temperaturabnahme [pro Sekunde] wird mit zunehmender Zeit [bzw. abnehmender Temperatur] immer geringer.

(2) Einsetzen ergibt: $T(120) = 20 + 80 \cdot e^{-1,2} \approx 44,1$ [°C].

Der Körper ist auf etwa 44,1 °C abgekühlt.

(3) Die Temperatur nähert sich für große *t* asymptotisch der Raumtemperatur $T_\text{R} = 20\ °\text{C}$:

$\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(20 + 80 \cdot e^{-0,01\cdot t}\right) = 20$ [°C].

In der Praxis nimmt der Körper nach endlicher Zeit die Raumtemperatur von 20 °C an.

Modelllösung b)

(1) Es gilt:

$$\frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left(20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01\cdot t_2} - e^{-0,01\cdot t_1})\right)$$
$$= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left[20 \cdot t - 8000 \cdot e^{-0,01\cdot t}\right]_{t_1}^{t_2}.$$

$$\left(20 \cdot t - 8000 \cdot e^{-0,01\cdot t}\right)' = 20 + 80 \cdot e^{-0,01\cdot t} = T(t).$$

Damit ist gezeigt, dass für den betrachteten Körper gilt:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left(20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01\cdot t_2} - e^{-0,01\cdot t_1})\right).$$

[Auch der Nachweis durch Integration ist denkbar.]

(2) Einsetzen von $t_1 = 0$ und $t_2 = 120$ ergibt: $\frac{1}{120} \cdot \left(20 \cdot 120 - 8000 \cdot \left(e^{-1,2} - 1\right)\right) \approx 66,6$.

Die mittlere Temperatur beträgt ungefähr 66,6 °C.

Modelllösung c)

(1) [Die geometrischen Eigenschaften der beiden im Zeitintervall $[0;120]$ dargestellten Graphen sind für alle $t \geq 0$ gegeben.]
Da der Graph von T' im 4. Quadranten verläuft, ist der Graph von *T* streng monoton fallend. Seine Linkskrümmung ist dadurch bedingt, dass der Graph von T' streng monoton steigt.

(2) Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal.
Begründung:
Für alle $t \geq 0$ gilt $T'(t) < 0$ und daher für den Betrag: $|T'(t)| = -T'(t)$.
Da die [differenzierbare] Funktion T' im [abgeschlossenen] Intervall $[0;120]$ [wegen $T''(t) = 0{,}008 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t} > 0$ für alle $t \geq 0$] streng monoton steigt, nimmt sie ihr Minimum am linken Rand dieses Intervalls, ihr Betrag dort sein Maximum $|T'(0)| = 0{,}8$ [°C/s] an.

(3) Der Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von *T* und der *t*-Achse eingeschlossenen Flächenstücks ist $A = \left|\int_0^{120} T'(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\left[T(t)\right]_0^{120}\right| \approx |44{,}1 - 100| = 55{,}9$ [°C].
Dieser Flächeninhalt gibt den Betrag der Temperaturabnahme des Körpers im Zeitintervall $[0;120]$ an.

(4) Die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[0;120]$ ist
$$\frac{T(120) - T(0)}{120 - 0} = \frac{20 + 80 \cdot e^{-1{,}2} - 100}{120} \approx -0{,}466 \text{ [°C/s]}.$$

Modelllösung d)

(1) Die **mittlere Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[0;120]$

beträgt $\frac{T'(120)-T'(0)}{120-0}=\frac{-0,01\cdot 80\cdot e^{-1,2}+0,01\cdot 80\cdot e^{0}}{120}\approx 0,00466\,[°\text{C/s}^2]$.

(2) Die **momentane Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit ist die Ableitung T'' der Funktion T' mit der Gleichung $T''(t)=0,008\cdot e^{-0,01\cdot t}$, $t\geq 0$.

Der gesuchte Zeitpunkt t ergibt sich aus dem Ansatz $T''(t)=0,00466$:

$$
\begin{aligned}
0,008\cdot e^{-0,01\cdot t}=0,00466 &\Leftrightarrow e^{-0,01\cdot t}=0,5825\\
&\Leftrightarrow -0,01\cdot t=\ln 0,5825\\
&\Leftrightarrow t\approx 54,04
\end{aligned}
$$

Nach ungefähr 54 s ist die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers genau so groß wie die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) beschreibt den Verlauf des Funktionsgraphen von T im Sachzusammenhang.	4 (I)
2	(2) berechnet die Temperatur des Körpers nach 120 s.	3 (I)
3	(3) prüft die Entwicklung der Temperatur des Körpers für große t.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) weist nach, dass die mittlere Temperatur des Körpers im Zeitintervall $[t_1;t_2]$ durch den angegebenen Term berechnet werden kann.	6 (II)
2	(2) berechnet die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) begründet qualitativ die Eigenschaften des Funktionsgraphen von T in *Abbildung 1* mit den Eigenschaften des in *Abbildung 2* dargestellten Graphen der Funktion T'.	4 (II)
2	(2) gibt an, zu welchem Zeitpunkt des Zeitintervalls $[0;120]$ der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.	2 (I)
3	(2) begründet, zu welchem Zeitpunkt der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.	3 (III)
4	(3) berechnet den Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von T' und der t-Achse eingeschlossenen Flächenstücks.	3 (I)
5	(3) interpretiert die Bedeutung des Flächeninhalts im Sachzusammenhang.	2 (III)
6	(4) ermittelt die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) bestimmt die mittlere Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	5 (II)
2	(2) ermittelt den gesuchten Zeitpunkt.	7 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt den Verlauf …	4 (I)			
2	(2) berechnet die Temperatur …	3 (I)			
3	(3) prüft die Entwicklung …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass …	6 (II)			
2	(2) berechnet die mittlere …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet qualitativ die …	4 (II)			
2	(2) gibt an, zu …	2 (I)			
3	(2) begründet, zu welchem …	3 (III)			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt …	3 (I)			
5	(3) interpretiert die Bedeutung …	2 (III)			
6	(4) ermittelt die mittlere …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die mittlere …	5 (II)			
2	(2) ermittelt den gesuchten …	7 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

An einer Autobahnbaustelle wird die Stauentwicklung im Berufsverkehr untersucht. Aus den an einem bestimmten Tag erhobenen Messdaten wird die **momentane Änderungsrate** der Staulänge (stark vereinfacht) durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = \frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t,\ 0 \le t \le 4,$$

modelliert (t in Stunden, $f(t)$ in Kilometern **pro Stunde**). Um 6.00 Uhr $(t = 0)$ beginnen sich die Fahrzeuge zu stauen. Der Graph von f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

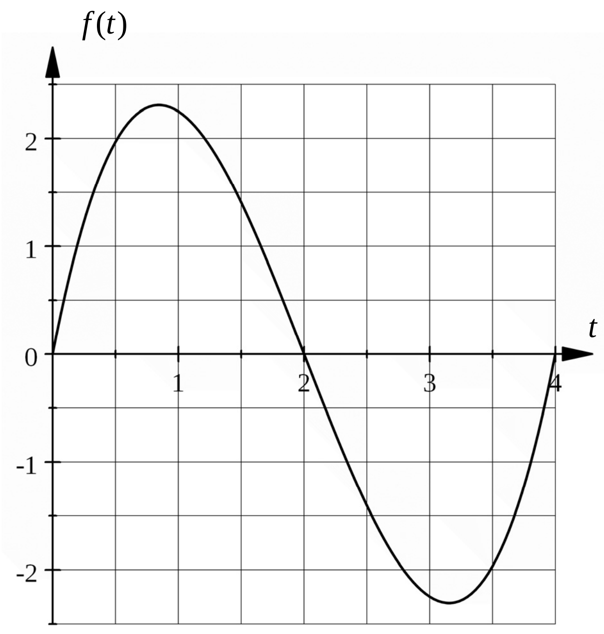


Abbildung 1

Name: ____________________

a) *Berechnen Sie die Nullstellen von f und erklären Sie die Bedeutung positiver und negativer Funktionswerte von f im Sachzusammenhang.* (6 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen die Staulänge am schnellsten zunimmt bzw. abnimmt.* (14 Punkte)

c) (1) *Begründen Sie, warum die Funktion F mit der Gleichung $F(t) = \frac{3}{16}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + 3t^2$, $0 \le t \le 4$, die Staulänge zum Zeitpunkt t beschreibt.*

(2) *Berechnen Sie die Staulänge für 6.30 Uhr.*

(3) *Berechnen Sie, um wie viel die Staulänge von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr zunimmt, und geben Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge an.*

(4) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht, und berechnen Sie diese maximale Staulänge.* (20 Punkte)

Name: ____________________

d) An einem bestimmten Tag beginnt der Stau um 6.00 Uhr $(t = 0)$ und hat sich um 10.00 Uhr $(t = 4)$ vollständig aufgelöst.

(1) *Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, die momentane Änderungsrate der Staulänge an diesem Tag durch die (differenzierbare) Funktion g zu modellieren, deren Graph in Abbildung 2 dargestellt ist.*

(2) *Ermitteln Sie eine notwendige Bedingung, die jede (differenzierbare) Funktion h, die die momentane Änderungsrate der Staulänge an diesem Tag sinnvoll modelliert, erfüllen muss.* (10 Punkte)

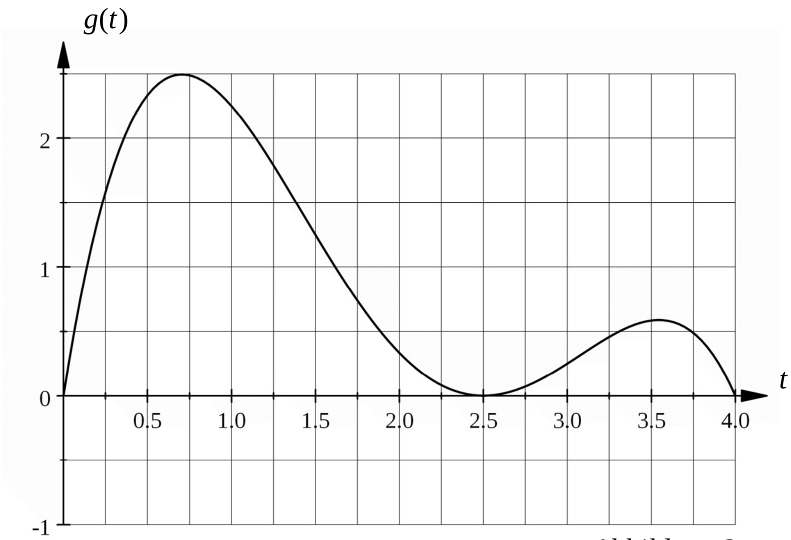


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$f(t)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t^3-\frac{9}{2}t^2+6t=0$$
$$\Leftrightarrow t=0 \vee t^2-6t+8=0$$
$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=2 \vee t=4$$

Die Funktion f hat die Nullstellen 0, 2 und 4.

Die positiven Funktionswerte von f für $0<t<2$ bedeuten: Zwischen 6.00 Uhr und 8.00 Uhr nimmt die Staulänge zu. Die negativen Funktionswerte von f für $2<t<4$ bedeuten: Zwischen 8.00 Uhr und 10.00 Uhr nimmt die Staulänge ab.

Modelllösung b)

Die gesuchten Zeitpunkte sind die Zeiten $t_{\max}$ bzw. $t_{\min}$, zu denen die Funktion f ihr [absolutes] Maximum $f(t_{\max})>0$ bzw. ihr [absolutes] Minimum $f(t_{\min})<0$ annimmt.

Ist $f'(t_0)=0$ und $f''(t_0)>0$ [$f''(t_0)<0$], dann ist $\left(t_0 \mid f(t_0)\right)$ ein lokaler Tiefpunkt [Hochpunkt] des Graphen von f.

$$f'(t)=\frac{9}{4}t^2-9t+6\,;\quad f'(t)=0 \Leftrightarrow t=2-\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 0,845 \vee t=2+\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 3,155\,.$$

Die Untersuchung von f'' oder des Vorzeichenwechsels von f' ergibt: An der Stelle $t=2-\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 0,845$ wird ein lokales Maximum mit positivem Funktionswert und an der Stelle $t=2+\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 3,155$ ein lokales Minimum mit negativem Funktionswert angenommen.

Wegen $f(0)=f(4)=0$ (Randwerte) sind die lokalen Extrema auch die absoluten Extrema im Zeitintervall $[0;4]$.

Die Staulänge nimmt also um 6.51 Uhr am schnellsten zu und nimmt um 9.09 Uhr am schnellsten ab.

Modelllösung c)

(1) Da $f(t)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde angibt und die Staulänge zum Zeitpunkt $t = 0$ laut Aufgabenstellung 0 km beträgt, berechnet sich die Staulänge zum Zeitpunkt *t*, $0 \le t \le 4$, durch das bestimmte Integral $\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$:

$$\int_0^t \left(\frac{3}{4}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + 6u\right)\mathrm{d}u = \frac{3}{16}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 = F(t)$$

(2) Wegen $F(0{,}5) \approx 0{,}574$ beträgt die Staulänge um 6.30 Uhr ca. 570 m.

(3) $F(1) - F(0{,}5) \approx 1{,}113$. Von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr hat die Staulänge um ca. 1,1 km zugenommen. Daraus ergibt sich für den Zeitraum von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr eine mittlere zeitliche Änderungsrate von ca. 2,2 km/h.

(4) An der Nullstelle $t_\mathrm{m} = 2$ der Ableitungsfunktion f von F wechselt f das Vorzeichen von + nach – (vgl. *Abbildung 1*). Daher ist $t_\mathrm{m} = 2$ lokale Maximalstelle von F.
Da F die Randwerte $F(0) = F(4) = 0$ hat, ist $F(2) = 3$ [absolutes] Maximum von F:
Um 8.00 Uhr ist die Staulänge maximal; sie beträgt dann 3 km.

Modelllösung d)

(1) Der Stau besteht von 6.00 bis 10.00 Uhr, hat also zu diesen Uhrzeiten jeweils die Länge 0. Da die zwischen dem Graphen von *g* und der *t*-Achse eingeschlossenen Flächenstücke beide oberhalb der *t*-Achse liegen, würde die Staulänge im gesamten Zeitintervall $[0;4]$ zunehmen und um 10.00 Uhr ihr Maximum erreichen, im Widerspruch zur Voraussetzung.
[Zur Information: Die Funktion *g*, deren Graph in *Abbildung 2* dargestellt ist, hat die Gleichung $g(t) = -\frac{1}{3}t \cdot (t - 2{,}5)^2 \cdot (t - 4)$.]

(2) Eine der folgenden Bedingungen oder eine gleichwertige wird erwartet:
1. Die Funktion *h* muss im Zeitintervall $[0;4]$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen.
2. Der Graph von *h* muss im Zeitintervall $[0;4]$ mit der *t*-Achse mindestens zwei Flächenstücke einschließen, die auf verschiedenen Seiten der *t*-Achse liegen. Die oberhalb der *t*-Achse (im 1. Quadranten) liegenden Flächenstücke müssen zusammen genau so groß sein wie die Flächenstücke unterhalb der *t*-Achse (im 4. Quadranten).

[Andere Formulierungen und Bedingungen sind möglich.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet die Nullstellen von *f*.	3 (I)
2	erklärt die Bedeutung positiver und negativer Funktionswerte von *f* im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	erklärt, dass die absoluten Extremstellen von *f* zu bestimmen sind.	3 (II)
2	berechnet die Nullstellen von f'.	4 (I)
3	bestimmt die absoluten Extremstellen von *f*.	4 (II)
4	interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) begründet, warum die Funktion *F* die Staulänge zum Zeitpunkt *t* beschreibt.	5 (II)
2	(2) berechnet die Staulänge für 6.30 Uhr.	2 (I)
3	(3) berechnet, um wie viel die Staulänge von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr zunimmt, und gibt für diesen Zeitraum die durchschnittliche zeitliche Änderungsrate an.	5 (I)
4	(4) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht.	6 (II)
5	(4) berechnet die maximale Staulänge.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	(1) begründet, warum die momentane Änderungsrate der Staulänge nicht durch g modelliert werden kann.	5 (II)
2	(2) ermittelt eine notwendige Bedingung, die jede sinnvolle Modellierungsfunktion h erfüllen muss.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Nullstellen …	3 (I)			
2	erklärt die Bedeutung …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	erklärt, dass die …	3 (II)			
2	berechnet die Nullstellen …	4 (I)			
3	bestimmt die absoluten …	4 (II)			
4	interpretiert die Ergebnisse …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, warum die …	5 (II)			
2	(2) berechnet die Staulänge …	2 (I)			
3	(3) berechnet, um wie …	5 (I)			
4	(4) bestimmt den Zeitpunkt …	6 (II)			
5	(4) berechnet die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (20) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**20**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, warum die …	5 (II)			
2	(2) ermittelt eine notwendige …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

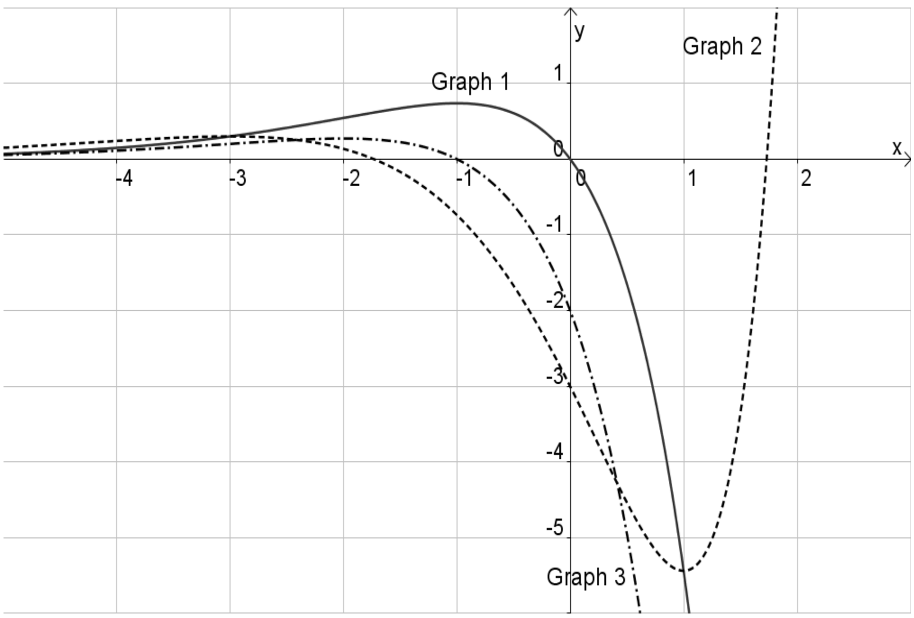
Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = e^x\left(x^2 - 3\right)$, $x \in \mathbb{R}$, und g mit $g(x) = -2x\,e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Graphen von f, g und der Ableitungsfunktion g' von g sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) (1) *Geben Sie an, welcher der abgebildeten Graphen zur Funktion f gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

(2) *Erklären Sie anhand dreier Merkmale, warum es sich bei Graph 3 um den Graphen von g' handeln muss.* (9 Punkte)

Name: ____________________

b) (1) *Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgraphen von f und g in den lokalen Extrempunkten des Graphen von f schneiden.*

[Zur Kontrolle: $E_1\left(-3\middle|6e^{-3}\right)$ und $E_2\left(1\middle|-2e\right)$ sind Schnittpunkte der Graphen von f und g.]

(2) *Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden s, die durch die Schnittpunkte E_1 und E_2 der Graphen von f und g verläuft.*

(3) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden n, die orthogonal zu s liegt und den Graphen von g im Ursprung schneidet.* (18 Punkte)

c) (1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Zeigen Sie, dass der Graph von g für $x < -3$ stets zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt.* (8 Punkte)

d) (1) *Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion von f mit der Differenzfunktion d der Funktionen f und g mit $d(x) = f(x) - g(x)$ übereinstimmt.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt A der durch die Graphen von f und g eingeschlossenen Fläche auf eine Dezimalstelle genau.*

(3) *Weisen Sie nach, dass durch $F(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)e^x$* eine Stammfunktion von f gegeben ist. (15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Laut Aufgabenstellung sind in der *Abbildung* die Graphen von f, g und g' dargestellt.

(1) Graph 2 ist der Graph der Funktion f. Das ergibt sich aus $f(0) = -3$ [oder: $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$], da Graph 2 als einziger der drei abgebildeten Graphen diese Eigenschaft besitzt. [Viele Alternativen sind denkbar.]

(2) Graph 1 ist der Graph von g, Graph 3 ist der Graph von g'.

Zur Erklärung können z. B. folgende Merkmale angeführt werden:

- Wegen $g(0) = 0$ ist Graph 1 der Funktionsgraph von g, da er als einziger durch den Ursprung geht. Übrig bleibt Graph 3, bei dem es sich daher um den Graphen von g' handeln muss.
- Graph 3 verläuft im Intervall $]-\infty;-1[$ oberhalb der *x*-Achse (g' hat positive Werte), Graph 1 hat in diesem Intervall positive Steigung.
- Graph 3 verläuft im Intervall $]-1;\infty[$ unterhalb der *x*-Achse (g' hat negative Werte), Graph 1 hat in diesem Intervall negative Steigung.
- Graph 3 schneidet die *x*-Achse an der Stelle –1 mit negativer Steigung. Graph 1 hat (ungefähr) an der Stelle –1 einen Hochpunkt.
- Graph 3 hat (ungefähr) an der Stelle –2 einen Hochpunkt, Graph 3 hat (ungefähr) an der Stelle –2 einen Wendepunkt.

[Die Teilaufgabe gilt als vollständig gelöst, wenn drei korrekte Merkmale angeführt sind.]

Modelllösung b)

(1) Ableitungsfunktionen: $f'(x) = 2xe^x + \left(x^2 - 3\right)e^x = \left(x^2 + 2x - 3\right)e^x$

$$f''(x) = (2x+2)e^x + \left(x^2 + 2x - 3\right)e^x = \left(x^2 + 4x - 1\right)e^x$$

Lokale Extremstellen von f:

Hinreichendes Kriterium ist $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$, da $e^x \neq 0$;

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

$f''(-3) = -4e^{-3} \neq 0$, $f''(1) = 4e \neq 0$: $x = -3$ und $x = 1$ sind lokale Extremstellen von *f*.

Schnittstellen von *f* und *g*:

$f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^x\left(x^2 - 3\right) = -2xe^x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Also schneiden sich die Graphen von *f* und *g* an den lokalen Extremstellen von *f*.

(2) Die Gerade *s* durch die Punkte $E_1\left(-3 \middle| 6e^{-3}\right)$ und $E_2\left(1 \middle| -2e\right)$ hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2 \\ &= \frac{-2e - 6e^{-3}}{1-(-3)}(x-1) - 2e \\ &\approx -1{,}434 \cdot (x-1) - 5{,}437 \\ &= -1{,}434x - 4{,}003 \\ &\approx -1{,}43x - 4{,}00. \end{aligned}$$

Also: $s(x) \approx -1{,}43x - 4$.

(3) Die Gerade *n* hat als Ursprungsgerade die Gleichung $n(x) = m_{\text{n}}x$.

Mit $m_{\text{n}} = -\frac{1}{m_{\text{s}}}$ ergibt sich $n(x) = -\frac{1}{m_{\text{s}}}x \approx -\frac{1}{-1{,}43}x \approx 0{,}70x$,

also: $n(x) \approx 0{,}7x$.

Modelllösung c)

(1) Nullstellen von *f*:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$$

(2) Bei $x=-3$ schneiden sich die Graphen von f und g.

Für $x<-3$ gilt:

i) Es gibt keinen weiteren Schnittpunkt der Graphen von *f* und g. Da z. B. $f(-4)>g(-4)$, liegt der Graph von g für $x<-3$ stets unterhalb des Graphen von f.

ii) Da $e^x>0$ und $-2x>0$, ist $g(x)=-2xe^x>0$, d. h., der Graph von g liegt oberhalb der *x*-Achse.

Modelllösung d)

(1) Differenzfunktion:

$$d(x)=f(x)-g(x)=e^x\left(x^2-3\right)-\left(-2xe^x\right)=\left(x^2+2x-3\right)e^x$$

Ableitungsfunktion:

$$f'(x)=2xe^x+\left(x^2-3\right)e^x=\left(x^2+2x-3\right)e^x$$

Also ist $d(x)=f'(x)$.

(2) Schnittstellen:

$d(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$ (siehe b (1)).

$$A=\left|\int_{-3}^{1} d(x)\,\mathrm{d}x\right|, \text{ da } d(x)=f'(x):$$

$$A=\left|[f(x)]_{-3}^{1}\right|=\left|\left(1^2-3\right)e-\left(\left((-3)^2-3\right)e^{-3}\right)\right|=\left|-2e-6e^{-3}\right|\approx 5{,}7$$

Die Fläche A hat einen Inhalt von etwa 5,7 FE.

(3) $F'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x-1\right)e^x=\left(x^2-3\right)e^x=f(x)$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) gibt an, welcher der abgebildeten Graphen zur Funktion *f* gehört.	2 (I)
2	(1) begründet die Entscheidung.	2 (II)
3	(2) erklärt anhand dreier Merkmale, warum es sich bei Graph 3 um den Graphen von g' handeln muss.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) berechnet die Funktionsterme von $f'(x)$ und $f''(x)$.	4 (I)
2	(1) zeigt, dass sich die Funktionsgraphen von *f* und *g* in den Extrempunkten des Graphen von *f* schneiden.	7 (II)
3	(2) berechnet eine Gleichung der Geraden *s*.	4 (I)
4	(3) bestimmt eine Gleichung der Geraden *n*.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) berechnet die Nullstellen der Funktion *f*.	2 (I)
2	(2) zeigt, dass der Graph von g für $x < -3$ stets zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse liegt.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) zeigt, dass die Ableitungsfunktion von f mit der Differenzfunktion d übereinstimmt.	4 (II)
2	(2) gibt die Schnittstellen von f und g an.	2 (I)
3	(2) bestimmt einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts von A.	3 (II)
4	(2) berechnet den Inhalt der Fläche A.	3 (I)
5	(3) weist nach, dass durch F eine Stammfunktion von f gegeben ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt an, welcher …	2 (I)			
2	(1) begründet die Entscheidung.	2 (II)			
3	(2) erklärt anhand dreier …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Funktionsterme …	4 (I)			
2	(1) zeigt, dass sich …	7 (II)			
3	(2) berechnet eine Gleichung …	4 (I)			
4	(3) bestimmt eine Gleichung …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Nullstellen …	2 (I)			
2	(2) zeigt, dass der …	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	4 (II)			
2	(2) gibt die Schnittstellen …	2 (I)			
3	(2) bestimmt einen Term …	3 (II)			
4	(2) berechnet den Inhalt …	3 (I)			
5	(3) weist nach, dass …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

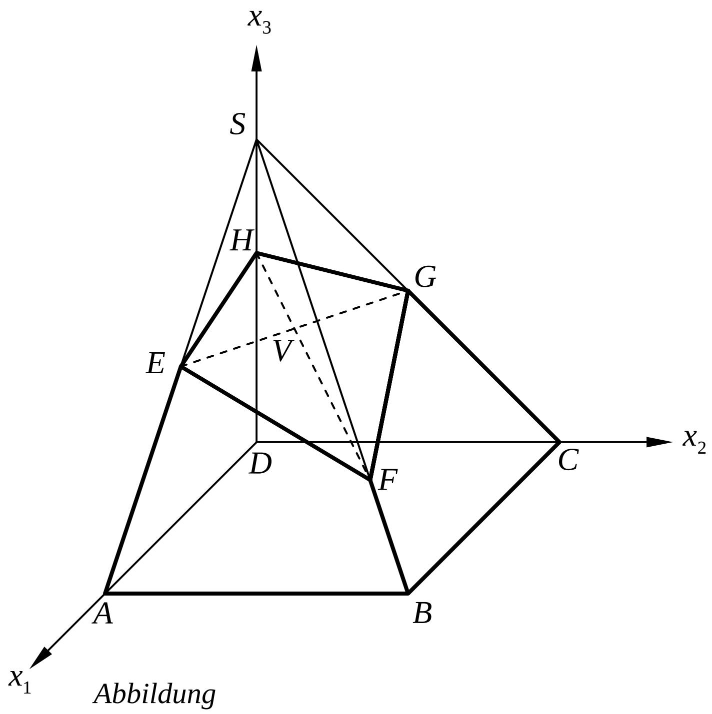
Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Designer erhält von einer Süßwarenfirma den Auftrag, eine neue Schachtel für ihre Schokolinsen zu entwerfen.
Der Entwurf sieht vor, dass die Schachtel Teil einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist. Durch den Schnitt mit einer geeigneten Ebene entsteht als Schnittfläche die viereckige Deckfläche der Schachtel.
Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(8|0|0)$, $B(8|8|0)$, $C(0|8|0)$, $D(0|0|0)$, ihre Spitze ist der Punkt $S(0|0|8)$.
Die Schnittebene E_{EGH} wird festgelegt durch die Punkte $E(4|0|4)$, $G(0|4|4)$ und $H(0|0|5)$ (alle Angaben sind in cm).
Die Schachtel ist dann der Körper mit den Eckpunkten *A, B, C, D, E, F, G, H*.



Abbildung

Name: ____________________

a) (1) *Geben Sie Breite und Höhe der Schachtel an.*

(2) *Geben Sie eine Parametergleichung der Ebene* E_{EGH} *an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.*

[Zur Kontrolle: $E_{\text{EGH}}: \ x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 = 20$]

(3) Das Viereck *EFGH* bildet die Deckfläche der Schachtel.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F.

[Zur Kontrolle: $F(6\,|\,6\,|\,2)$]

(4) *Prüfen Sie, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.*

(18 Punkte)

b) Entlang der beiden Diagonalen der Deckfläche (Viereck *EFGH*) soll die Schachtel geöffnet werden können.

(1) *Zeigen Sie, dass die Diagonalen orthogonal sind.*

(2) *Berechnen Sie die Länge der beiden Diagonalen und bestimmen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes V.*

(3) *Berechnen Sie den Flächeninhalt der Deckfläche.* (17 Punkte)

c) In einem zweiten Entwurf der Schachtel wird die Deckfläche und damit die Form der Schachtel folgendermaßen geändert: Die neue Deckfläche entsteht durch den Schnitt der bekannten Pyramide *ABCDS* mit der Ebene $E' : x_3 = 4$.

(1) *Weisen Sie nach, dass die neuen Punkte* $F'(4\,|\,4\,|\,4)$ *und* $H'(0\,|\,0\,|\,4)$ *sowie die schon bekannten Punkte E und G Eckpunkte der neuen Deckfläche sind.*

(2) *Untersuchen Sie, welche Form die neue Deckfläche (Viereck EF'GH') hat.*

(3) *Ermitteln Sie mit Hilfe der Anschauung, welche Bedingungen eine Ebene erfüllen muss, damit durch den Schnitt dieser Ebene mit der Pyramide ABCDS eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht.* (15 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Breite der Schachtel: $b = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 8\text{ cm}$.

Höhe der Schachtel: $h = \left|\overrightarrow{DH}\right| = 5\text{ cm}$.

(2) Mögliche Parametergleichung von E_{EGH}:

$$\vec{x} = \overrightarrow{DE} + r\cdot\overrightarrow{EG} + s\cdot\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich $\left|\begin{array}{lcl}x_1 &=& 4-4r-4s\\ x_2 &=& 4r\\ x_3 &=& 4+s\end{array}\right|$, $\left|\begin{array}{lcl}x_1 &=& 4-x_2-4\cdot(x_3-4)\\ r &=& x_2/4\\ s &=& x_3-4\end{array}\right|$ und schließlich

$E_{\text{EGH}}:\ x_1 + x_2 + 4\cdot x_3 = 20$.

(3) F ist der Schnittpunkt der Ebene E_{EGH} mit der Geraden g durch S und B.

Es gilt $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{DS} + k\cdot\overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$.

Einsetzen der „rechten Seite“ in die Koordinatengleichung von E_{EGH} führt auf die

Gleichung $8k + 8k + 4\cdot(8-8k) = 20$ mit der Lösung $k = \frac{3}{4}$.

Einsetzen von k in die Parametergleichung von g ergibt $F(6\,|\,6\,|\,2)$.

(4) Der Spannvektor $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$ der Ebene E_{EGH} liegt nicht in der x_1-x_2-Ebene. Daher ist

E_{EGH} nicht parallel zur x_1-x_2-Ebene, somit auch die Deckfläche der Schachtel nicht parallel zu ihrer Grundfläche.

Modelllösung b)

(1) Das Skalarprodukt der Diagonalenvektoren $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{HF}$ ist Null:

$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{HF} = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$. Die Diagonalen sind somit orthogonal.

(2) $|\overrightarrow{EG}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}7$ [cm], $|\overrightarrow{HF}| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+36+9} = 9$ [cm].

Der Schnittpunkt V der Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ muss wie die Punkte E und G die x_3-Koordinate 4 haben: $V = (v_1 \mid v_2 \mid 4)$. Aus dem Ansatz

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DH} + r \cdot \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich sofort $r = \frac{1}{3}$ sowie $v_1 = v_2 = 2$.

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist $V(2 \mid 2 \mid 4)$.

(3) Die Diagonalen sind gemäß (1) orthogonal. Für den Flächeninhalt der Deckfläche gilt:

$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}| \cdot |\overrightarrow{HV}| + \frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}| \cdot |\overrightarrow{VF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}| \cdot |\overrightarrow{HF}| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 9 = 18\sqrt{2} \approx 25{,}5$ [cm^2].

[Da außerdem V der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ ist, handelt es sich bei dem Viereck *EFGH* um ein Drachenviereck.]

Modelllösung c)

(1) $F'(4|4|4)$ und $H'(0|0|4)$ erfüllen wie auch $E(4|0|4)$ und $G(0|4|4)$ offensichtlich die Gleichung der Ebene $E': x_3 = 4$.

$F'(4|4|4)$ halbiert die Strecke $\overline{SB}$, liegt also auf $\overline{SB}$.

$H'(0|0|4)$ halbiert die Strecke $\overline{DS}$, liegt also auf $\overline{DS}$.

Somit sind $F'(4|4|4)$ und $H'(0|0|4)$ neben $E(4|0|4)$ und $G(0|4|4)$ Eckpunkte der neuen Deckfläche.

(2) Es gilt $|\overrightarrow{EF'}| = |\overrightarrow{F'G}| = |\overrightarrow{GH'}| = |\overrightarrow{H'E}| = 4$ und benachbarte Seiten sind orthogonal. Die neue Deckfläche ist also ein Quadrat.

(3) Der Anschauung entnimmt man: Damit durch den Schnitt einer Ebene mit der Pyramide *ABCDS* eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht, muss diese Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene sein. Ihre Schnittfläche mit der Pyramide muss mehr als einen Punkt enthalten und darf nicht die Grundfläche der Pyramide sein.
[Diese Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn die Ebene die Gleichung $x_3 = a$ mit $0 < a < 8$ hat.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) gibt Breite und Höhe der Schachtel an.	2 (I)
2	(2) gibt eine Parametergleichung von E_{EGH} an.	4 (I)
3	(2) bestimmt eine Koordinatengleichung von E_{EGH}.	3 (II)
4	(3) bestimmt die Koordinaten des Punktes *F*.	6 (II)
5	(4) prüft, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) zeigt, dass die Diagonalen orthogonal sind.	4 (II)
2	(2) berechnet die Länge der beiden Diagonalen.	4 (I)
3	(2) bestimmt die Koordinaten ihres Schnittpunktes *V*.	5 (II)
4	(3) berechnet den Flächeninhalt der Deckfläche.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) weist nach, dass die Punkte $F'(4\,\vert\,4\,\vert\,4)$ und $H'(0\,\vert\,0\,\vert\,4)$ sowie die schon bekannten Punkte $E(4\,\vert\,0\,\vert\,4)$ und $G(0\,\vert\,4\,\vert\,4)$ Eckpunkte der neuen Deckfläche sind.	5 (II)
2	(2) untersucht, welche Form die neue Deckfläche (Viereck *EF'GH'*) hat.	5 (II)
3	(3) ermittelt mit Hilfe der Anschauung, welche Bedingungen eine Ebene erfüllen muss, damit durch den Schnitt dieser Ebene mit der Pyramide *ABDCS* eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt Breite und …	2 (I)			
2	(2) gibt eine Parametergleichung …	4 (I)			
3	(2) bestimmt eine Koordinatengleichung …	3 (II)			
4	(3) bestimmt die Koordinaten …	6 (II)			
5	(4) prüft, ob die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	4 (II)			
2	(2) berechnet die Länge …	4 (I)			
3	(2) bestimmt die Koordinaten …	5 (II)			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) weist nach, dass …	5 (II)			
2	(2) untersucht, welche Form …	5 (II)			
3	(3) ermittelt mit Hilfe …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben ist in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Abbildung f mit der Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) (1) *Berechnen Sie bzgl. der Abbildung f die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C' der Punkte $A(2\,|\,1)$, $B(-4\,|\,2)$ und $C(5\,|\,3)$.*

[Zur Kontrolle: $A'(0\,|\,-1)$, $B'(-8\,|\,-2)$, $C'(-1\,|\,-3)$]

(2) *Zeichnen Sie die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ in ein geeignetes Koordinatensystem.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ parallel sind.*

(4) *Prüfen Sie, ob die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ $\overline{CC'}$ auf einer Geraden g liegen.*

[Zur Kontrolle: *g* ist die *x*-Achse.]

(5) *Erklären Sie, warum die Abbildung f eine Schrägspiegelung an der Geraden g genannt wird.* (17 Punkte)

b) (1) Gegeben ist in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ein Punkt $P(u\,|\,v)$ mit $v \neq 0$. P' sei der Bildpunkt von *P* bzgl. der Abbildung f.

Begründen Sie anhand der Koordinaten von P', dass die Punkte P und P' verschieden sind.

(2) *Zeigen Sie: Die Gerade $g_{\mathrm{PP'}}$ verläuft parallel zur Geraden $g_{\mathrm{AA'}}$ aus (a), und die Strecke $\overline{PP'}$ wird von der x-Achse halbiert.* (8 Punkte)

Name: ____________________

Gegeben ist die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$.

c) (1) *Beweisen Sie, dass die Abbildung f die Gerade h auf die Gerade*
$h': \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$*, abbildet.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden h und h'.*
[Zur Kontrolle: $Q(1 \mid 0)$] (9 Punkte)

d) (1) *Zeichnen Sie die Geraden h und h' mit dem Schnittpunkt Q in ein geeignetes Koordinatensystem.*

(2) Es sei $a > 1$ eine positive reelle Zahl. Die Parallele durch den Punkt $R(a \mid 0)$ zur y-Achse schneidet die Gerade h im Punkt S und die Gerade h' im Punkt T.
Stellen Sie für $a = 5$ in der Zeichnung aus (1) *die genannte Parallele und die Punkte R, S und T dar*.

(3) *Bestimmen Sie für jede reelle Zahl $a > 1$ die Koordinaten der Punkte S und T.*
[Zur Kontrolle: $S(a \mid \frac{a-1}{3})$, $T(a \mid 1-a)$]

(4) *Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a den Flächeninhalt des Dreiecks TSQ.*

(16 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

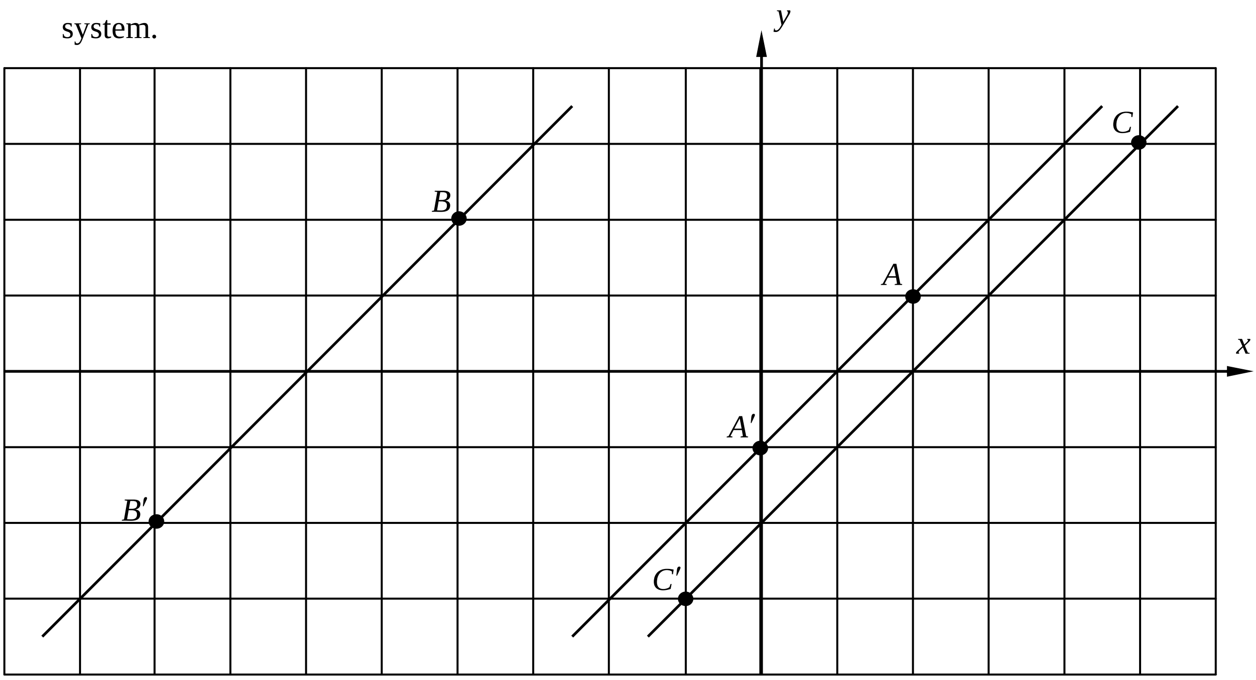
6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Man erhält $\vec{x}_{A'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

$\vec{x}_{C'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(2) Der Prüfling zeichnet die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ in ein geeignetes Koordinatensystem.



(3) Es gilt $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CC'} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$. Offensichtlich sind diese Vektoren kollinear, was die Behauptung impliziert.

[Alternative: Man bestimmt die Steigungen der Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$.]

(4) $\overline{AA'}$ hat den Mittelpunkt $M_1(1\,|\,0)$, $\overline{BB'}$ den Mittelpunkt $M_2(-6\,|\,0)$ und $\overline{CC'}$ den Mittelpunkt $M_3(2\,|\,0)$. Hieraus folgt, dass die drei Mittelpunkte auf der *x*-Achse liegen.

(5) Bei einer Achsenspiegelung steht die Verbindungsgerade von einem Punkt P außerhalb der Spiegelachse und dessen Bildpunkt P' senkrecht auf der Spiegelachse und die Strecke $\overline{PP'}$ wird von der Spiegelachse halbiert. Im vorliegenden Fall ist diese Eigenschaft für die Punkte A, B und C bzgl. der Geraden g erfüllt, aber die parallelen Verbindungsgeraden $g_{\mathrm{AA'}}$, $g_{\mathrm{BB'}}$ und $g_{\mathrm{CC'}}$ schneiden die Gerade g nicht mehr senkrecht, sondern „schräg". Daher ist der Name „Schrägspiegelung" für die Abbildung f geometrisch sinnvoll.
(Oder jedes andere Argument, das die Namensgebung plausibel macht, je nach abbildungsgeometrischen Vorkenntnissen der Prüflinge; z. B.: Es gibt eine Fixpunktgerade, und es ist $f \circ f$ die identische Abbildung; oder: Es gibt eine Fixpunktgerade und einen nicht orthogonalen Eigenvektor.)

Modelllösung b)

(1) Man erhält $\vec{x}_{\mathrm{P'}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2v \\ -v \end{pmatrix}$. Wegen $v \neq 0$ ist $-v \neq v$. Also ist $P \neq P'$.

(2) Es gilt $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} u-2v \\ -v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v \\ -2v \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nach a) ist $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Daher sind $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{AA'}$ kollinear und die genannten Geraden parallel.

(3) Die Strecke $\overline{PP'}$ besitzt den Mittelpunkt $M(u-v\,|\,0)$, der auf der x-Achse liegt.

Modelllösung c)

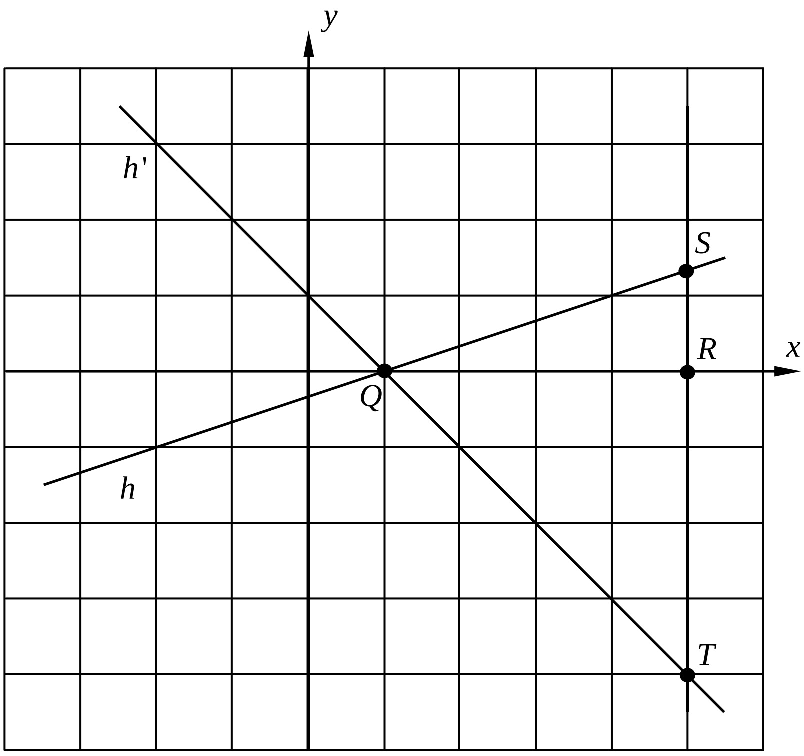
(1) Ein Punkt D liegt genau dann auf der Geraden h, wenn es $r \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x}_D = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gibt. Nun ist $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Hieraus folgt die Behauptung.

(2) Die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden h und h' erfolgt mit Hilfe des LGS I. $-2+3r = s$, II. $-1+r = 1-s$. Hieraus ergibt sich $r = s = 1$ und somit $Q(1\,|\,0)$.

Modelllösung d)

(1) Der Prüfling zeichnet die Geraden h und h' mit dem Schnittpunkt Q in ein geeignetes Koordinatensystem.

(2) Der Prüfling stellt für $a = 5$ die Punkte R, S und T und die Parallele durch R zur y-Achse in der Zeichnung aus (1) dar.



(3) Es sei $S(a \mid y_S)$ und $T(a \mid y_T)$. Es gilt $\vec{x}_S = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r_S \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. $\begin{pmatrix} a \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r_S \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hieraus ergibt sich das LGS: I. $a = -2 + 3r_S$, II. $y_S = -1 + r_S$. Wegen $r_S = \dfrac{a+2}{3}$ folgt

$y_S = \dfrac{a-1}{3}$.

Entsprechend gilt $\vec{x}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, d. h. $\begin{pmatrix} a \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Hieraus ergibt sich das LGS: I. $a = s_T$, II. $y_T = 1 - s_T$. Daher ist $y_T = 1 - a$.

[Alternative: Die Gerade *h* hat die Steigung $\frac{1}{3}$. Durch Betrachtung des Steigungsdreiecks *QRS* erhält man $\frac{y_S}{a-1} = \frac{1}{3}$. Hieraus folgt $y_S = \frac{a-1}{3}$. Die Gerade h' hat die Steigung –1. Durch Betrachtung des Steigungsdreiecks *QTR* erhält man $\frac{y_T}{a-1} = -1$. Demnach ist $y_T = 1-a$.]

(4) Die Gerade g_{ST} schneidet die *x*-Achse in $R(a\,|\,0)$. Wegen $\left|\overrightarrow{ST}\right| = \frac{a-1}{3} + a - 1 = \frac{4}{3}(a-1)$ und $\left|\overrightarrow{QR}\right| = a-1$ hat das Dreieck *TSQ* den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(a-1)(a-1) = \frac{2}{3}(a-1)^2$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C'.	3 (I)
2	zeichnet die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ in ein geeignetes Koordinatensystem.	4 (I)
3	zeigt, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ parallel sind.	3 (II)
4	prüft, ob die Mittelpunkte von $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ auf einer Geraden *g* liegen.	3 (II)
5	erklärt, warum die Abbildung *f* eine Schrägspiegelung an der Geraden *g* genannt wird.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet, dass die Punkte P und P' verschieden sind.	4 (II)
2	zeigt die genannten Eigenschaften von $g_{PP'}$ und $\overline{PP'}$.	4 (II)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beweist, dass die Abbildung f die Gerade h auf die Gerade h' abbildet.	5 (II)
2	berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes Q der Geraden h und h'.	4 (I)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zksystem.	4 (I)
2	stellt für $a = 5$ die Punkte R, S und T und die genannte Parallele in der Zeichnung aus (1) dar.	3 (I)
3	bestimmt in Abhängigkeit von a die Koordinaten der Punkte S und T.	4 (II)
4	ermittelt in Abhängigkeit von a den Flächeninhalt des Dreiecks TSQ.	5 (III)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Koordinaten …	3 (I)			
2	zeichnet die Geraden …	4 (I)			
3	zeigt, dass die …	3 (II)			
4	prüft, ob die …	3 (II)			
5	erklärt, warum die …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass die …	4 (II)			
2	zeigt die genannten …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beweist, dass die …	5 (II)			
2	berechnet die Koordinaten …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeichnet die Geraden …	4 (I)			
2	stellt für $a = 5$ …	3 (I)			
3	bestimmt in Abhängigkeit …	4 (II)			
4	ermittelt in Abhängigkeit …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Bei der Aufzucht von Rindern unterscheidet man zwischen Neugeborenen (N), einjährigen Kälbern (K) und geschlechtsreifen erwachsenen Tieren (E), den Kühen und Bullen (mindestens zweijährig). Um eine Rinderherde wirtschaftlich erfolgreich zu betreiben, muss man Kenntnisse über die Anzahl der Geburten, der Todesfälle und der Entnahmen durch Schlachtung oder Verkauf haben. Zudem muss die Verteilung der Herde in den drei Altersstufen (N, K, E) bekannt sein.
In der hier betrachteten Rinderherde werden die Übergänge zwischen den Altersstufen innerhalb eines Jahres durch die folgende Matrix A angegeben:

$$\begin{array}{rc} & \text{von:}\quad N \qquad K \qquad E \\ \begin{array}{r} N \\ \text{nach}: K \\ E \end{array} & A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) *Stellen Sie die Entwicklung der Rinderherde durch einen Übergangsgraphen dar. Beschreiben Sie die biologische Bedeutung des Matrixelementes $a_{13} = 0{,}4$ und bestimmen Sie den Anteil der erwachsenen Tiere (E), die nach einem Jahr in der Rinderherde verblieben sind, sowie den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.* (12 Punkte)

b) Zurzeit befinden sich 40 Neugeborene, 150 Kälber und 100 Erwachsene in der Herde.

Berechnen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen in der Herde für das nächste und das übernächste Jahr.
Bestimmen Sie die Verteilung auf die drei Altersstufen für das vergangene Jahr.
(10 Punkte)

Name: ____________________

c) *Untersuchen Sie, ob es bei den in der Matrix A gegebenen Übergangsverhältnissen eine Verteilung auf die Altersstufen in der Rinderherde gibt, die sich im Folgejahr wiederholt.* (10 Punkte)

d) Durch eine Krankheit überleben in einem Jahr nur 50 % der Neugeborenen. Dadurch verändert sich in diesem Jahr die Übergangsmatrix zu $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Verteilung in der Herde nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr, ausgehend von der Anfangsverteilung im Aufgabenteil b). (6 Punkte)

e) *Bestimmen Sie die Matrix $C = A \cdot B$ und beschreiben Sie exemplarisch, wie man auf die Matrixelemente der neuen Matrix C kommt.*
Interpretieren Sie die Komponenten von C im Sachzusammenhang.
Begründen Sie rechnerisch, dass es relevant ist, ob die Krankheit im ersten oder im zweiten Jahr auftritt. (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

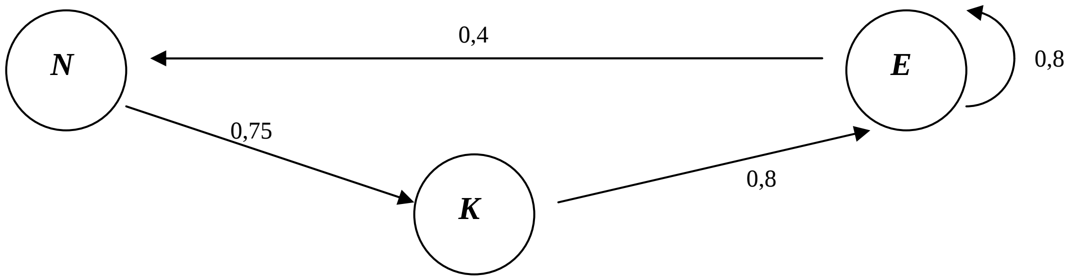
5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



Das Matrixelement $a_{13} = 0{,}4$ („von E nach N“) gibt die Geburtenrate in der Rinderherde an, d. h., 40 % der erwachsenen Tiere bekommen innerhalb eines Jahres Nachwuchs.
Das Matrixelement $a_{33} = 0{,}8$ („von E nach E“) gibt den Anteil der in der Herde verbleibenden erwachsenen Tiere an, d. h., 80 % der erwachsenen Tiere bleiben in der Herde.

Es erreichen $0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6 = 60\,\%$ der Neugeborenen das Erwachsenenstadium.

Modelllösung b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Damit sind es im nächsten Jahr 40 neugeborene Tiere, 30 Kälber und 200 erwachsene Tiere, im darauffolgenden Jahr sind es entsprechend 80, 30 und 184.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 25 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Damit waren im vergangenen Jahr 200 neugeborene Tiere, 25 Kälber und 100 erwachsene Tiere in der Herde.

Modelllösung c)

Fixpunktansatz: $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x + 0,4z = 0 \\ 0,75x - y = 0 \\ 0,8y - 0,2z = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} -x + 0,4z = 0 \\ 0,75x - 0,25z = 0 \\ 0,8y - 0,2z = 0 \end{matrix} \qquad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

Damit wiederholt sich die Verteilung in der Rinderherde nur dann, wenn es keine Rinderherde gibt.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Verteilung auf die Altersstufen in der Rinderherde, die sich im Folgejahr wiederholt.

Modelllösung d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 176 \end{pmatrix}$$

[Alternative: Zweimalige Multiplikation „Matrix / Vektor“]

Damit erhält man nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr eine Verteilung von 80 Neugeborenen, 30 Kälbern und 176 erwachsenen Rindern in der Herde.

Modelllösung e)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Man erhält beispielsweise das Element $c_{13} = 0,32$ in $C = A \cdot B$ als Produktsumme der 1. Zeile von *A* mit der 3. Spalte von *B*.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.]

C enthält die Übergangsquoten nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr.

Zur rechnerischen Begründung der Relevanz, ob die Krankheit im ersten oder im zweiten Jahr auftritt, bietet sich eine Verwendung der Matrix $D = B \cdot A$ an.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Berechnung der neuen Verteilung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge hat einen Einfluss auf die Anzahl der einjährigen Kälber und der erwachsenen Rinder.

[**Lösungsalternative:** Anwendung der Matrizen *A* und *B* nacheinander auf einen Verteilungsvektor in unterschiedlicher Reihenfolge]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	stellt die Entwicklung in der Herde durch einen Übergangsgraphen dar.	3 (I)
2	beschreibt die biologische Bedeutung von a_{13}.	3 (II)
3	bestimmt den Anteil der erwachsenen Tiere, die in der Herde verbleiben.	3 (II)
4	bestimmt den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet die Verteilung für das nächste Jahr.	3 (I)
2	berechnet die Verteilung für das übernächste Jahr.	3 (I)
3	bestimmt die Verteilung für das vergangene Jahr.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	untersucht anhand eines Fixpunktansatzes.	3 (II)
2	bestimmt die eindeutige Lösung des entstandenen LGS.	4 (II)
3	erklärt, dass es keine Verteilung gibt, die sich im Folgejahr wiederholt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Verteilung nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr.	6 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt $C = A \cdot B$.	3 (II)
2	beschreibt, wie man an die Matrixelemente von C kommt.	3 (II)
3	interpretiert die Komponenten von C im Sachzusammenhang.	3 (III)
4	begründet anhand von $D = B \cdot A$ (oder anhand einer Alternative), dass es relevant ist, ob die Krankheit im 1. oder im 2. Jahr auftritt.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt die Entwicklung …	3 (I)			
2	beschreibt die biologische …	3 (II)			
3	bestimmt den Anteil …	3 (II)			
4	bestimmt den Anteil …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	3 (I)			
2	berechnet die Verteilung …	3 (I)			
3	bestimmt die Verteilung …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht anhand eines …	3 (II)			
2	bestimmt die eindeutige …	4 (II)			
3	erklärt, dass es …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	6 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt $C = A \cdot B$.	3 (II)			
2	beschreibt, wie man …	3 (II)			
3	interpretiert die Komponenten …	3 (III)			
4	begründet anhand von …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Beim Spielen mit einem Würfel stellt ein Spieler fest, dass die Augenzahl „1" überdurchschnittlich häufig, die Augenzahl „6" dagegen relativ selten auftritt. Dies führt zu der Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeit, eine „6" zu würfeln, nur 10 % beträgt.
Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Vermutung zutrifft.

a) Mit dem Würfel wird 100-mal nacheinander gewürfelt. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechsen.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 100 Würfen genau 10 Sechsen auftreten.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 100 Würfen mindestens 16 Sechsen auftreten.*

(3) *Berechnen Sie Erwartungswert μ_X und Standardabweichung σ_X und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X um höchstens $1{,}5 \cdot \sigma_X$ von μ_X abweicht.*

(10 Punkte)

b) Mit dem Würfel wird mehrmals nacheinander gewürfelt.

(1) *Ermitteln Sie, wie oft ein Spieler mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal eine „6" zu erhalten.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass erst im fünften Wurf zum ersten Mal eine Sechs auftritt.* (9 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Vermutung, dass die „6“ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1/6 auftritt, es sich also um einen gefälschten Würfel handelt, soll getestet werden. Dazu wird der Würfel 200-mal geworfen.

(1) *Beschreiben Sie einen sinnvollen Hypothesentest zum Signifikanzniveau 5 % (Zufallsgröße, Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang, Entscheidungsregel).*

(2) *In den 200 Würfen erhält man 26-mal die „6“. Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis noch mit der geäußerten Vermutung verträglich ist.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aufgrund der in (1) aufgestellten Entscheidungsregel davon ausgegangen wird, dass eine „6“ in mindestens 1/6 der Würfe auftritt, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür nur 10 % beträgt.*

(17 Punkte)

d) Die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, sei weiter 0,1.
Mit diesem Würfel führen nun zwei Spieler A und B ein Glücksspiel durch.
Spieler A legt einen bestimmten Geldbetrag g ($g \geq 4$ €) als Einsatz auf den Tisch. Dann würfelt er einmal. Fällt eine „6“, so muss Spieler B die auf dem Tisch liegende Summe verdoppeln; fällt keine „6“, darf Spieler B sich 2 € vom Tisch nehmen.
Dann wirft Spieler A den Würfel ein zweites Mal.
Fällt eine „6“, so muss Spieler B die auf dem Tisch liegende Summe wiederum verdoppeln; fällt keine „6“, darf Spieler B sich erneut 2 € vom Tisch nehmen.
Damit ist das Spiel beendet und Spieler A erhält den noch auf dem Tisch liegenden Restbetrag.

(1) *Stellen Sie den Spielverlauf in geeigneter Weise durch ein Baumdiagramm dar.*

(2) *Ermitteln Sie, wie groß der Einsatz des Spielers A sein muss, damit dieses Spiel fair ist.*

(14 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p									
n	k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		n
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n
		p									

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		*p* = 0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27			0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28			0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29			0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30			0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33			0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34			0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35			0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36			0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37			0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38				0,8369	0,4019	161	
	39				0,8777	0,4718	160	
	40				0,9106	0,5422	159	
	41				0,9362	0,6108	158	
	42				0,9556	0,6758	157	
	43				0,9699	0,7355	156	
	44				0,9801	0,7887	155	
	45				0,9872	0,8349	154	
	46				0,9919	0,8738	153	
	47				0,9950	0,9056	152	
	48				0,9970	0,9310	151	
	49				0,9983	0,9506	150	
	50				0,9990	0,9655	149	
	51				0,9995	0,9764	148	
	52				0,9997	0,9843	147	
	53				0,9998	0,9897	146	
	54				0,9999	0,9934	145	
	55					0,9959	144	
	56					0,9975	143	
	57					0,9985	142	
	58					0,9991	141	
	59					0,9995	140	
	60					0,9997	139	
	61					0,9998	138	
	62					0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
		p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

$\phi(z) = 0{,}994 \Rightarrow z = 2{,}51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Einseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X ist $B_{100;0,1}$-verteilt.

(1) $P(X = 10) = \binom{100}{10} 0{,}1^{10}\, 0{,}9^{90} = 0{,}1319$.

(2) $P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0{,}9601 = 0{,}0399$.

(3) $\mu_X = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ und $\sigma_X = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$;

$P(\,|\,X - \mu_X\,| \leq 1{,}5 \cdot \sigma_X\,) = P(5{,}5 \leq X \leq 14{,}5) = P(6 \leq X \leq 14) = 0{,}9274 - 0{,}0576$
$= 0{,}8698$.

(Tabelle der $B_{100;\,0,1}$-Verteilung)

Modelllösung b)

(1) Die Zufallsgröße X ist jetzt $B_{n;0,1}$-verteilt:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \iff 1 - P(X = 0) \geq 0{,}95 \iff P(X = 0) \leq 0{,}05 \iff 0{,}9^n \leq 0{,}05$

$\iff n \cdot \lg 0{,}9 \leq \lg 0{,}05 \Rightarrow n \geq 28{,}4$

Der Spieler muss mindestens 29-mal würfeln.

(2) Die Zufallsgröße Y zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten „6“.

$P(Y = 5) = 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}06561$

Modelllösung c)

(1) Getestet werden die Hypothesen

$H_0: \ p \geq 1/6$ gegen $H_1: \ p < 1/6$.

[Eine im Übrigen konsistente Lösung bei entgegengesetzter Wahl der Hypothesen soll auch akzeptiert werden.]

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechsen in 200 Würfen. Bei Annahme der Nullhypothese ist X $B_{200;1/6}$-verteilt mit $\mu_X \approx 33{,}3$ und $\sigma_X \approx \sqrt{27{,}78} \approx 5{,}27 > 3$.

Die kritische Grenze k ist so zu bestimmen, dass $P_{1/6}(X < k) \leq 0{,}05$.

Für das 5 %-Signifikanzniveau ist das der Fall, wenn

$X < k = \mu_X - 1{,}64\sigma_X \approx 33{,}3 - 1{,}64 \cdot \sqrt{27{,}78} \approx 24{,}69$ (σ-Tabelle).

Es ergeben sich der Ablehnungsbereich $A = \{0, \ \dots , 24\}$ und der Annahmebereich $\overline{A} = \{25, \dots , 200\}$.

Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, tatsächlich (mindestens) 1/6 beträgt, aber aufgrund des Würfelergebnisses von $p < 1/6$ (gefälschter Würfel) ausgegangen wird.

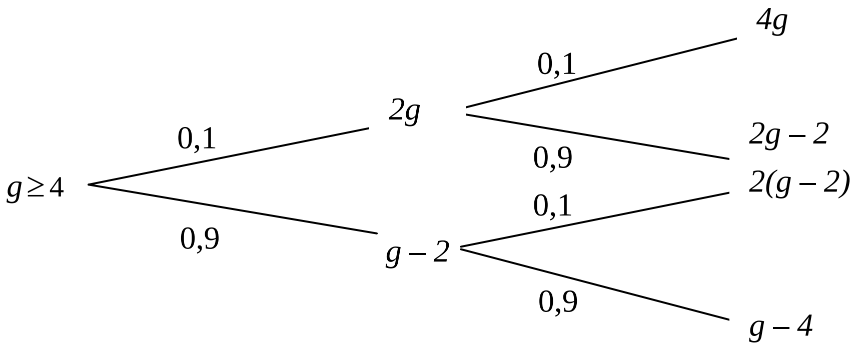
Ein Fehler 2. Art liegt dann vor, wenn man aufgrund des Würfelergebnisses annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine „6“ mindestens 1/6 beträgt, aber tatsächlich $p < 1/6$ ist.

(2) Ein Würfelergebnis von 26 Sechsen ist mit der Hypothese noch verträglich; H_o kann auf dem Signifikanzniveau 5 % nicht abgelehnt werden.

(3) Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.
X ist jetzt $B_{200;0,1}$-verteilt; mit der Tabelle der Binomialverteilung ist
$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - 0{,}8551 = 0{,}1449$.

Modelllösung d)

(1) Ein Baumdiagramm kann den Spielverlauf aus der Sicht des Spielers A z. B. so veranschaulichen; die Verwendung der Variable g ist hier noch nicht erforderlich:



(2) Die Zufallsgröße X beschreibt hier den Gewinn des Spielers A.
X hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	$3g$	$g - 2$	$g - 4$	-4
$P(X = x)$	$0{,}1^2$	$0{,}1 \cdot 0{,}9$	$0{,}9 \cdot 0{,}1$	$0{,}9^2$

Es handelt sich um ein faires Spiel, wenn $E(X) = 0$ ist:

$E(X) = 3g \cdot 0{,}01 + (g - 2) \cdot 0{,}09 + (g - 4) \cdot 0{,}09 - 4 \cdot 0{,}81 = 0{,}21\, g - 3{,}78 = 0 \Leftrightarrow g = 18.$

Der Einsatz für ein faires Spiel beträgt genau 18 €.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) berechnet $P(X = 10)$.	2 (I)
2	(2) berechnet $P(X \geq 16)$.	3 (I)
3	(3) berechnet μ_X und σ_X und bestimmt $P(6 \leq X \leq 14)$.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) ermittelt einen geeigneten Lösungsansatz.	3 (II)
2	(1) bestimmt die Anzahl der erforderlichen Würfe.	3 (II)
3	(2) bestimmt $P(Y = 5)$.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) nennt die Hypothesen und beschreibt die Zufallsgröße.	3 (I)
2	(1) ermittelt die kritische Grenze / den Ablehnungsbereich.	4 (II)
3	(1) beschreibt die Fehler 1. und 2. Art.	4 (II)
4	(2) entscheidet, die Hypothese H_o nicht abzulehnen.	3 (II)
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) stellt den Spielverlauf im Baumdiagramm dar.	6 (II)
2	(2) stellt die Ergebnisse mit Hilfe des Einsatzes dar und bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn.	5 (III)
3	(2) ermittelt die Höhe des Einsatzes für ein faires Spiel.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $P(X = 10)$.	2 (I)			
2	(2) berechnet $P(X \geq 16)$.	3 (I)			
3	(3) berechnet μ_X und …	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt einen geeigneten …	3 (II)			
2	(1) bestimmt die Anzahl …	3 (II)			
3	(2) bestimmt $P(Y = 5)$.	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) nennt die Hypothesen …	3 (I)			
2	(1) ermittelt die kritische …	4 (II)			
3	(1) beschreibt die Fehler …	4 (II)			
4	(2) entscheidet, die Hypothese …	3 (II)			
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Spielverlauf …	6 (II)			
2	(2) stellt die Ergebnisse …	5 (III)			
3	(2) ermittelt die Höhe…	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Im Dezember 2008 veröffentlichte das ZDF im Politbarometer das Ergebnis einer Umfrage der Forschungsgruppe Wahlen unter 1268 Wahlberechtigten:

Hinweis: 2 % der Befragten sind in ihrer Erwartung für das neue Jahr unentschlossen. Dieser Anteil wurde in der ZDF-Graphik nicht abgebildet.

Name: ____________________

a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Befragten, die ein besseres Jahr erwarten.

(1) *Geben Sie an, unter welchen Voraussetzungen die Binomialverteilung eine gute Näherung an die Verteilung von X ist.*

Es wird angenommen, dass der wirkliche Anteil dieser Personen in der Gesamtbevölkerung gleich der relativen Häufigkeit in der Umfrage ist.

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stichprobe von 15 befragten Personen*

i) *genau 3 Personen ein besseres Jahr erwarten,*

ii) *mindestens 1 Person ein besseres Jahr erwartet.* (11 Punkte)

b) Der tatsächliche Anteil aller Wahlberechtigten, die **kein** besseres Jahr erwarten, sei nun gleich 80 %. Man befragt 50 zufällig ausgesuchte Personen.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 40 Personen kein besseres Jahr erwarten.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die relative Häufigkeit der Personen, die kein besseres Jahr erwarten, mindestens 75 % und höchstens 85 % beträgt.* (12 Punkte)

c) Der tatsächliche Anteil aller Wahlberechtigten, die ein besseres Jahr erwarten, sei gleich 20 %.

Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall und prüfen Sie, ob das Ergebnis der Umfrage der Forschungsgruppe Wahlen unter 1268 Personen $(p = 22\,\%)$ *mit einem wirklichen Anteil von 20 % verträglich ist. Beschreiben Sie die Bedeutung der Sicherheitswahrscheinlichkeit.* (13 Punkte)

d) (1) *Ermitteln Sie näherungsweise die Anzahl der Personen, die man mindestens befragen muss, damit sich der Anteil der Personen in der Stichprobe, die ein besseres Jahr erwarten, vom wirklichen Anteil* $p = 0{,}2$ *mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % um höchstens* $d = 0{,}03$ *unterscheidet.*

(2) *Beschreiben und begründen Sie durch eine kurze Rechnung, wie sich der notwendige Stichprobenumfang ändert, wenn man*

i) *nur die Sicherheitswahrscheinlichkeit,*

ii) *nur die Abweichung d verändert.* (14 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5	*k*	*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p									
n	k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		n
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n
		p									

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

				p				
n	*k*	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27			0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28			0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29			0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30			0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33			0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34			0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35			0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36			0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37			0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38				0,8369	0,4019	161	
	39				0,8777	0,4718	160	
	40				0,9106	0,5422	159	
	41				0,9362	0,6108	158	
	42				0,9556	0,6758	157	
	43				0,9699	0,7355	156	
	44				0,9801	0,7887	155	
	45				0,9872	0,8349	154	
	46				0,9919	0,8738	153	
	47				0,9950	0,9056	152	
	48				0,9970	0,9310	151	
	49				0,9983	0,9506	150	
	50				0,9990	0,9655	149	
	51				0,9995	0,9764	148	
	52				0,9997	0,9843	147	
	53				0,9998	0,9897	146	
	54				0,9999	0,9934	145	
	55					0,9959	144	
	56					0,9975	143	
	57					0,9985	142	
	58					0,9991	141	
	59					0,9995	140	
	60					0,9997	139	
	61					0,9998	138	
	62					0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
				p				

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Für jede befragte Person gibt es **zwei mögliche** Antworten (besseres Jahr oder kein besseres Jahr). Die „Erfolgswahrscheinlichkeit" ist von Person zu Person gleich, d. h., die Grundgesamtheit muss groß sein im Vergleich zum Stichprobenumfang und die befragten Personen müssen in ihrer Einschätzung **unabhängig** voneinander sein.

(2) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n = 15 und p = 0,22;

i) $P(X=3)=\binom{15}{3}\cdot 0{,}22^3\cdot 0{,}78^{12}\approx 0{,}2457$

ii) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}78^{15}\approx 0{,}9759$

Modelllösung b)

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Personen in der Stichprobe, die kein besseres Jahr erwarten. Y ist binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,8;

(1) $P_{0,8}(Y=40)=P_{0,2}(X=10)=P_{0,2}(X\leq 10)-P_{0,2}(X\leq 9)=0{,}5836-0{,}4437=0{,}1399$.

[Mit Taschenrechner ggf. von der Tabelle geringfügig abweichende Lösung]

(2) $P_{0,8}(0{,}75\leq \frac{Y}{n}\leq 0{,}85)=P_{0,8}(50\cdot 0{,}75\leq Y\leq 50\cdot 0{,}85)=P_{0,8}(37{,}5\leq Y\leq 42{,}5)=$

$P_{0,8}(38\leq Y\leq 42)=P_{0,2}(8\leq X\leq 12)=P_{0,2}(X\leq 12)-P_{0,2}(X\leq 7)=0{,}8139-0{,}1904=0{,}6235$.

(Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen mit n = 50 und p = 0,8)

Modelllösung c)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen, die ein besseres Jahr erwarten.

Für n = 1268 und p = 0,2 erhält man

$\mu = n \cdot p = 253{,}6$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 14{,}24 > 3$.

Mit Hilfe der σ-Tabelle also

$$P(\mu - 1{,}96\sigma \;\leq\; X \;\leq\; \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad P(p - 1{,}96\frac{\sigma}{n} \;\leq\; \frac{X}{n} \;\leq\; p + 1{,}96\frac{\sigma}{n}) \approx 0{,}95,$$

da $p = \frac{\mu}{n}$.

Die Grenzen der $1{,}96\frac{\sigma}{n}$-Umgebung von p sind somit gegeben durch

$0{,}2 - 1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}1780$ und $0{,}2 + 1{,}96\frac{\sigma}{n} \approx 0{,}2220$; sie definieren das Konfidenzintervall [0,178; 0,222].

Die relative Häufigkeit $\frac{X}{n} = 0{,}22$ der ZDF-Umfrage liegt in diesem Intervall. Sie ist auf dem 95 %-Niveau verträglich mit p = 0,2.

Bedeutung der Sicherheitswahrscheinlichkeit: Bei einer großen Anzahl von Stichproben liegt in etwa 95 % aller Fälle die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$ in der $1{,}96\frac{\sigma}{n}$-Umgebung von p.

Modelllösung d)

(1) Bei der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 % gilt für die Abweichung der relativen Häufigkeit $\frac{X}{n}$ vom wirklichen Anteil p:

$\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 1{,}64\frac{\sigma}{n}$ (Argumentation analog zu Aufgabenteil c)).

Aus $1{,}64\frac{\sigma}{n} \leq 0{,}03$ folgt demnach $\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0{,}03$, d. h., die relative Häufigkeit und der wirkliche Anteil unterscheiden sich dann um höchstens 3 %.

$$1{,}64\frac{\sigma}{n} = 1{,}64\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \leq 0{,}03 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}64^2\,\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{n} \leq 0{,}03^2$$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{1{,}64^2}{0{,}03^2}\,0{,}2\cdot 0{,}8 \approx 478{,}15$$

Bei einem Stichprobenumfang von mindestens 479 Personen unterscheidet sich die relative Häufigkeit vom wirklichen Anteil um höchstens 3 % (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %).

(2) i) Die Genauigkeit der Schätzung für p ist nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit einzuhalten. Soll diese zunehmen, so muss bei vorgeschriebener Genauigkeit der Stichprobenumfang zunehmen – und umgekehrt.
Analog zu (1): Mit wachsender Sicherheitswahrscheinlichkeit steigt auch c und damit $n \geq \frac{c^2}{0{,}03^2}\,0{,}2\cdot 0{,}8$.

Entsprechend:

ii) Mit steigender/sinkender Toleranz d nimmt der notwendige Umfang n der Stichprobe bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit ab/zu.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	(1) gibt die Voraussetzungen für die Binomialverteilung bezogen auf die Umfrage an.	4 (I)
2	(2) i) legt die Zufallsvariable und die Parameter fest und berechnet $P(X=3)$.	4 (I)
3	(2) ii) berechnet $P(X \geq 1)$.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	beschreibt die Zufallsgröße Y und berechnet $P(Y=40)$.	5 (I)
2	bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(38 \leq Y \leq 42)$.	7 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Ansatz für die Bestimmung der 95 %-Umgebung.	4 (II)
2	bestimmt die Grenzen des Konfidenzintervalls und gibt an, ob das Umfrageergebnis mit dem Anteil von 20 % verträglich ist.	7 (II)
3	beschreibt die Bedeutung der Sicherheitswahrscheinlichkeit.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) bestimmt einen Ansatz zur Berechnung des notwendigen Stichprobenumfanges.	4 (II)
2	(1) bestimmt den notwendigen Stichprobenumfang.	4 (II)
3	(2) beschreibt die Zusammenhänge und begründet die Aussagen.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Voraussetzungen …	4 (I)			
2	(2) i) legt die Zufallsvariable …	4 (I)			
3	(2) ii) berechnet $P(X \geq 1)$.	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt die Zufallsgröße …	5 (I)			
2	bestimmt die gesuchte …	7 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	4 (II)			
2	bestimmt die Grenzen …	7 (II)			
3	beschreibt die Bedeutung …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt einen Ansatz …	4 (II)			
2	(1) bestimmt den notwendigen …	4 (II)			
3	(2) beschreibt die Zusammenhänge …	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0