Name: ____________________

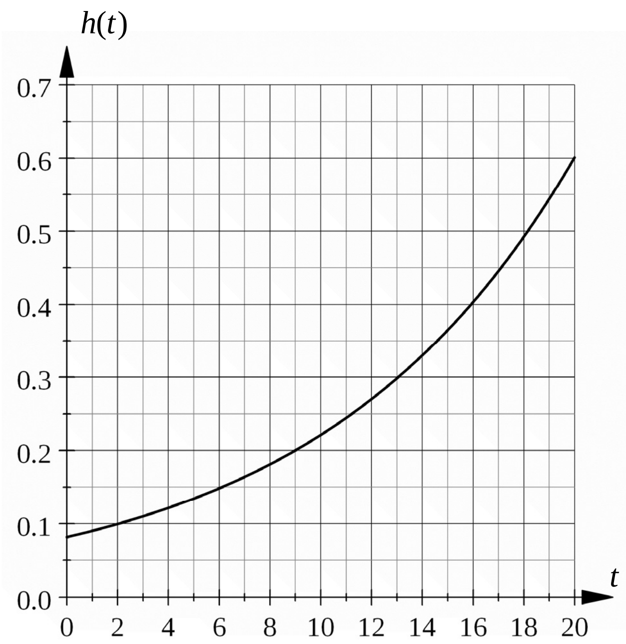
Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Die Höhe eines Strauches in den ersten zwanzig Tagen nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(t) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}1 \cdot t - 0{,}9}$ (t in Tagen, $h(t)$ in Metern) beschrieben. Vom Beginn des 21. Tages an $(t = 20)$ verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches. Von diesem Zeitpunkt an ist nur noch die Zuwachsrate bekannt, sie wird beschrieben durch die Funktion z mit der Funktionsgleichung $z(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$.

a) *Berechnen Sie den Funktionswert von h an der Stelle $t = 0$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. Geben Sie anhand der nebenstehenden Abbildung an, zu welchem Zeitpunkt der Strauch eine Höhe von 50 cm hat. Bestimmen Sie den Wert rechnerisch.*



(12 Punkte)

Name: ____________________

b) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt t innerhalb der ersten zwanzig Tage* $(0 \leq t \leq 20)$, *an dem die Pflanze am schnellsten wächst. Berechnen Sie die zugehörige Wachstumsgeschwindigkeit.*
Begründen Sie, warum die angegebene Funktion h nur für einen begrenzten Zeitraum die Höhe der Pflanze beschreiben kann. (11 Punkte)

c) *Bestimmen Sie, wie groß der Strauch am Ende des 20. Tages ist und um wie viel er in den folgenden 10 Tagen wächst.* (10 Punkte)

d) *Ermitteln Sie einen Term* $h_2(t)$, *der die Höhe des Strauches nach t Tagen* $(t > 20)$ *beschreibt.*
Begründen Sie anhand dieses Terms, dass der Strauch nicht beliebig hoch wird, und geben Sie die maximale Höhe des Strauches an.

[Zur Kontrolle: $h_2(t) \approx 1{,}2 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}, t > 20$] (10 Punkte)

e) Alternativ zur Funktion *h* werde die Höhe des Strauches im Intervall $[0;20]$ durch eine beliebige andere (differenzierbare) Modellfunktion f beschrieben.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen dieser Modellfunktion f und der Funktion h im Intervall $[0;20]$. (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$h(0) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot 0 - 0,9} \approx 0,081$

Der Strauch hat beim Auspflanzen eine Höhe von 8,1 cm.

Anhand der Graphik kann man ablesen, dass $h(18) \approx 0,5$.

$0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad t = 10 \cdot \ln(2,5) + 9 \approx 18,2$

Modelllösung b)

Der gesuchte Zeitpunkt entspricht einer Wendestelle des Graphen, nämlich einer Stelle mit der größten Steigung. Da jedoch für eine Exponentialfunktion wie der vorliegenden die Steigung mit wachsendem t ebenfalls stetig zunimmt, existiert in diesem Fall keine Wendestelle. Demnach erreicht für $t = 20$ der Graph die größte Steigung und somit der Strauch die größte Wachstumsgeschwindigkeit. Da die Ableitung der Funktion der Pflanzenhöhe der Wachstumsgeschwindigkeit entspricht, muss also berechnet werden:

$h'(t) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9}$

$h'(20) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} \approx 0,060$.

Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag. Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

Modelllösung c)

Die Höhe des Strauches ist gegeben durch

$h(20) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} \approx 0,601$.

Ab dem einundzwanzigsten Tag muss die hinzugewonnene Höhe durch Integration der Funktion z berechnet werden:

$$\int_{20}^{30} 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} \mathrm{d}t = \left[-10 \cdot 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}\right]_{20}^{30} \approx 0,380.$$

Modelllösung d)

Die Höhe des Strauches kann berechnet werden, indem zu der Höhe nach 20 Tagen ein durch Integration der Funktion *z* mit variabler oberer Grenze ermittelter Term addiert wird:

$$h_2(t) \approx 0{,}601 + \int_{20}^{t} 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1} \mathrm{d}u = 0{,}601 + \left[-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1}\right]_{20}^{t} \approx 1{,}202 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$$

Da der Teilterm im Exponenten des Funktionsterms mit steigendem *t* gegen minus Unendlich strebt, wird der Strauch nicht höher als ca. 1,20 Meter. Als vollwertig werden Lösungen akzeptiert, die statt einer Grenzwertbetrachtung eine Untersuchung mit sehr großen *t*-Werten („Einsatz von großen Zahlen für *t*“) und einer entsprechenden Interpretation beinhalten.

Modelllösung e)

Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion $d = h - f$ definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall [0;20] berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.

Alternative Lösungswege sind denkbar.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Funktionswert an der Stelle 0.	2 (I)
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)
3	gibt den Zeitpunkt $t = 18$ an.	3 (I)
4	berechnet den Zeitpunkt $t = 18{,}2$.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die erste Ableitung.	3 (I)
2	begründet, warum keine Wendestelle existiert.	3 (II)
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit an der Stelle 20.	2 (I)
4	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Funktionswert an der Stelle 20.	2 (I)
2	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)
3	berechnet das bestimmte Integral.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Term für die Höhe des Strauches zum Zeitpunkt t.	5 (III)
2	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
3	gibt die maximale Höhe des Strauches an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen f und h im Intervall [0;20].	7 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)			
3	gibt den Zeitpunkt …	3 (I)			
4	berechnet den Zeitpunkt …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die erste …	3 (I)			
2	begründet, warum keine …	3 (II)			
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit …	2 (I)			
4	begründet anhand der …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
2	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)			
3	berechnet das bestimmte …	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Term …	5 (III)			
2	begründet anhand der …	3 (II)			
3	gibt die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt ein Verfahren …	7 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

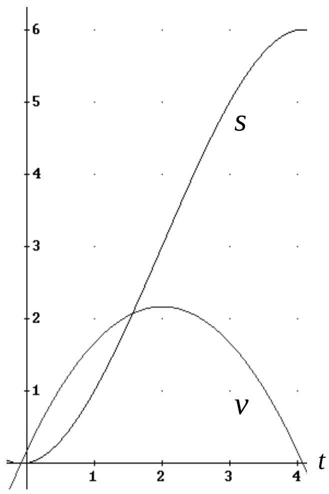
Im Rahmen eines Schulprojektes führen Schülerinnen und Schüler unterstützt durch die Polizei eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einem 6 km langen Stück Landstraße werden nach Kilometer 1, 3 und 6 die Fahrzeiten gemessen. Die Messstrecke beginnt an einem Stoppschild; die zulässige Höchstgeschwindigkeit auf der Landstraße beträgt 100 km/h. Ihre Messergebnisse haben die Schülerinnen und Schüler in der folgenden Tabelle festgehalten:

Messung	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2	Messung 3
Zeitpunkt *t* in Minuten	0	1	2	4
Zurückgelegter Weg $s(t)$ in km	0	1	3	6

Die Funktion $s(t)$ beschreibt den zurückgelegten Weg vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt *t*.

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt *t* ist $v(t)$ und die Beschleunigung zum Zeitpunkt *t* wird mit $a(t)$ bezeichnet.

Es gilt: $s'(t) = v(t)$ und $v'(t) = a(t)$.



a) Eine Schülergruppe hat die Messergebnisse mit einer Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades *s* modelliert, die den zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

   Bestimmen Sie diese Gleichung. (9 Punkte)

   [Zur Kontrolle: $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t$]

Name: ____________________

b) *Berechnen Sie die Extremstellen des Graphen von s und weisen Sie nach, dass das absolute Maximum von s im Zeitraum der durchgeführten Geschwindigkeitsmessung bei* $t = 4$ *liegt. Begründen Sie dies im Sachzusammenhang.* (10 Punkte)

Folgen Sie bei den Aufgabenteilen c) und d) der Annahme, dass die von der Schülergruppe aufgestellte Funktion *s* den Verlauf der Fahrt angemessen wiedergibt.

c) (1) *Geben Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v an und prüfen Sie, ob der Fahrer am Stoppschild tatsächlich gehalten hat.*

(2) *Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit.*

(3) *Beurteilen Sie mit mindestens zwei unterschiedlichen Argumenten die Angemessenheit der von der Schülergruppe gewählten Modellfunktion für diese Geschwindigkeitskontrolle.* (15 Punkte)

d) (1) *Geben Sie die Gleichung der Beschleunigungsfunktion a an.*

(2) Die Beschleunigung a ist für $0 < t < 2$ positiv, für $t = 2$ Null und für $t > 2$ negativ.
Beschreiben Sie die Bedeutung der Eigenschaften der Funktion a für die Geschwindigkeitsfunktion v. Geben Sie eine mögliche Erklärung für das veränderte Fahrverhalten an. (9 Punkte)

e) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse über dem Intervall* $[0; 2]$. *Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert* $v(2)$ *und interpretieren Sie die Differenz.* (7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Für den Ansatz $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \ (a, b, c, d \in IR; a \neq 0)$ liefern die gegebenen Bedingungen: (1) $s(0) = 0$; (2) $s(1) = 1$; (3) $s(2) = 3$; (4) $s(4) = 6$.

Aus (1) folgt: $d = 0$; weiterhin folgt aus (2) bis (4):

$$\left| \begin{array}{rl} a + b + c &= 1 \\ \wedge \ 8a + 4b + 2c &= 3 \\ \wedge \ 64a + 16b + 4c &= 6 \end{array} \right| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rl} a + b + c &= 1 \\ \wedge \ 6a + 2b &= 1 \\ \wedge \ 12a &= -2 \end{array} \right|$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert $a = -\frac{1}{6}$; $b = 1$; $c = \frac{1}{6}$; mit $d = 0$ gilt so:

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t \ .$$

Modelllösung b)

Bestimmung der Extrempunkte

$s'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6}$ und $s''(t) = -t + 2$ (Summen-, Faktorregel)

Die notwendige Bedingung $s'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t_{1/2} = 2 \pm \frac{\sqrt{39}}{3}$

liefert zwei mögliche Extremstellen.

Mit $s'(t_e) = 0 \wedge s''(t_e) \neq 0$, konkret $s''\left(2 + \frac{\sqrt{39}}{3}\right) = -\left(2 + \frac{\sqrt{39}}{3}\right) + 2 = -\frac{\sqrt{39}}{3} < 0$

und $s''\left(2 - \frac{\sqrt{39}}{3}\right) = -\left(2 - \frac{\sqrt{39}}{3}\right) + 2 = \frac{\sqrt{39}}{3} > 0$, folgt:

In $t_1 = 2 + \frac{\sqrt{39}}{3} \approx 4{,}08$ liegt ein lokales Maximum und in $t_2 = 2 - \frac{\sqrt{39}}{3} \approx -0{,}08$ ein lokales Minimum vor.

Im betrachteten Intervall liegt keine der berechneten lokalen Extremstellen. Die Randüberprüfung liefert mit $s(0) = 0$ und $s(4) = 6$, dass das absolute Maximum in $t = 4$ liegt. Inhaltlich ist dies plausibel, da das betrachtete Fahrzeug am Ende der Messung die größte Wegstrecke zurückgelegt hat.

Modelllösung c)

(1) Mit $s'(t) = v(t)$ folgt $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6}$.

Mit $v(0) = \frac{1}{6}$ ergibt sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Stoppschild: Sie beträgt 1/6 Kilometer pro Minute, also 10 km/h. Der Fahrer hat folglich nicht angehalten. [Hier sollen auch alternative Lösungen akzeptiert werden, die z. B. nur die Tabelle als Argumentationsgrundlage nutzen.]

(2) Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit im Intervall [0;4]

$v'(t) = -t + 2$ und $v''(t) = -1$ (Summen-, Faktorregel)

Die notwendige Bedingung $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ liefert eine mögliche Extremstelle.

Mit $v''(2) = -1 < 0$ liegt in $t = 2$ ein lokales Maximum mit $v(2) = 2\frac{1}{6}$.

Die Überprüfung der Ränder ergibt $v(0) = \frac{1}{6}$ und $v(4) = \frac{1}{6}$, dass $2\frac{1}{6}$ absolutes Maximum der Geschwindigkeitsfunktion im Intervall [0;4] ist.

Die Maximalgeschwindigkeit liegt mit 2 1/6 Kilometer pro Minute, also 130 km/h, deutlich über der zulässigen Höchstgeschwindigkeit.

(3) Der von der Schülergruppe gewählte Ansatz ist sicherlich nicht zulässig. Mögliche Argumente lauten:

- zu wenige Messwerte für eine stetige Modellierung,
- Wahl einer Funktion dritten Grades ist problematisch,
- Messpunkte zu weit auseinander, da die Momentangeschwindigkeit nicht exakt angegeben werden kann,
- Berücksichtigung der Messgenauigkeit,
- die Tabelle ist ausreichend für die Verwendung eines stückweise linearen Modells.

Modelllösung d)

Die Beschleunigungsfunktion a hat die Gleichung $a(t) = v'(t) = -t + 2$.

Im Intervall [0;2] ist die Beschleunigungsfunktion a positiv. Die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion v ist in diesem Intervall mit positiver Ableitung streng monoton steigend. In $t = 2$ besitzt der Graph von v eine waagerechte Tangente, da $v'(t) = a(t) = 0$. Mit dem (+/−)-Vorzeichenwechsel von a besitzt die Geschwindigkeitsfunktion hier ein lokales Maximum. Für $t > 2$ ist die Geschwindigkeitsfunktion v streng monoton fallend.

In den ersten zwei Minuten der Messung wird das Fahrzeug konstant beschleunigt, die Geschwindigkeit nimmt über den gesamten Zeitraum zu. Die Höchstgeschwindigkeit wird nach 2 Minuten erreicht. Bis zur vierten Minute der Messung verringert sich nun die Geschwindigkeit immer mehr.

Mögliche Erklärungen: Die Strecke wird hier immer kurviger oder ein vorausfahrendes, langsameres Fahrzeug beendet die Raserei ... (Der Aufgabenteil gilt als gelöst, wenn eine Erklärung gegeben wird.)

Modelllösung e)

Der Graph von a mit $a(t) = -t + 2$ hat eine Nullstelle in $t = 2$.

Für die Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse gilt also:

$$A = \int_0^2 a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-t+2)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^2 = 2\,.$$

Damit schließt der Graph von a mit der t-Achse im Intervall [0;2] eine Fläche mit 2 FE ein.

Die Geschwindigkeitsfunktion liefert an der Stelle $t = 2$ den Wert $v(2) = 2\frac{1}{6}$.

Mit dem Integral $\int_0^2 a(t)\,\mathrm{d}t = 2$ wird hier die Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 2$ berechnet. Da aber das betrachtete Fahrzeug beim Start der Messung bereits eine Geschwindigkeit von 1/6 Kilometer pro Minute besaß, ergibt sich folglich

$$v(2) = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}.$$

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich in allen Fällen als Summe der Anfangsgeschwindigkeit bzw. des Anfangswertes und dem Wert des Integrals über a im Intervall [0;2].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt die benötigten Gleichungen an.	2 (I)
2	ermittelt die Lösung des linearen Gleichungssystems.	5 (II)
3	nennt den Funktionsterm.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Extremstellen des Graphen von s.	5 (I)
2	weist die Lage des absoluten Maximums in $t = 4$ nach.	2 (II)
3	begründet die Lage des absoluten Maximums im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion v an.	3 (I)
2	(1) prüft die Beachtung des Stoppschildes.	3 (II)
3	(2) bestimmt maximale Geschwindigkeit im Intervall [0;4].	5 (II)
4	(3) beurteilt mit mindestens zwei unterschiedlichen Argumenten die Angemessenheit der gewählten Modellfunktion.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) gibt die Beschleunigungsfunktion a an.	2 (I)
2	(2) beschreibt die Bedeutung der Werte der Beschleunigungsfunktion a für die Geschwindigkeitsfunktion v.	4 (II)
3	(2) gibt eine Möglichkeit für ein verändertes Fahrverhalten an.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von a und der t-Achse im Intervall $[0;2]$ und gibt den Wert von $v(2)$ an.	4 (I)
2	interpretiert den Wert des Integrals mit dem Funktionswert $v(2)$ und erläutert die Differenz im Sachzusammenhang.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die benötigten …	2 (I)			
2	ermittelt die Lösung …	5 (II)			
3	nennt den Funktionsterm.	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Extremstellen …	5 (I)			
2	weist die Lage …	2 (II)			
3	begründet die Lage …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion …	3 (I)			
2	(1) prüft die Beachtung …	3 (II)			
3	(2) bestimmt die maximale …	5 (II)			
4	(3) beurteilt mit mindestens …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Beschleunigungsfunktion …	2 (I)			
2	(2) beschreibt die Bedeutung …	4 (II)			
3	(2) gibt eine Möglichkeit …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Flächeninhalt …	4 (I)			
2	interpretiert den Wert …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Eine Funktion f ist gegeben durch

$f(x) = 2x \cdot e^{-4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in der nebenstehenden *Abbildung 1* dargestellt.

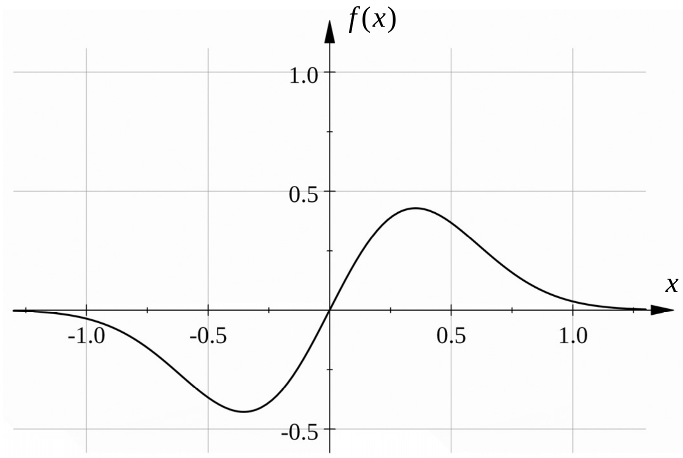


Abbildung 1

a) (1) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und untersuchen Sie sein Unendlichkeitsverhalten.*

(2) *Bestimmen Sie für den Graphen von f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Extrempunkte.*

(3) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f drei Wendepunkte besitzt.* (26 Punkte)

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \left(2 - 16x^2\right) \cdot e^{-4x^2}$]

Name: ____________________

b) Die Punkte $O(0\,|\,0)$, $P(u\,|\,0)$ und $Q(u\,|\,f(u))$, $u > 0$, legen ein rechtwinkliges Dreieck OPQ fest (siehe *Abbildung 2*).

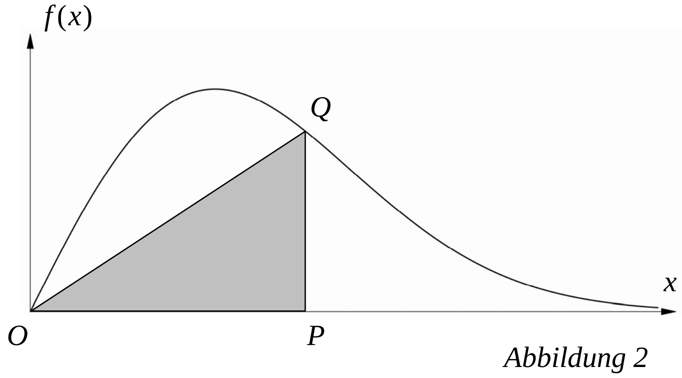


Abbildung 2

Ermitteln Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist. Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: $A(u) = u^2 \cdot e^{-4u^2}$]

c) *Zeigen Sie, dass durch $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}$ eine Stammfunktion von f gegeben ist.*

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;2]$ einschließt.

Begründen Sie, dass sich der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;k]$ einschließt, für immer größer werdende $k \in \mathbb{R}^+$ dem Wert 0,25 FE beliebig annähert. (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, denn für alle $x \in$ R

gilt: $f(-x) = 2(-x) \cdot e^{-4(-x)^2} = -2x \cdot e^{-4x^2} = -f(x)$.

Mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{e^{4x^2}} = 0$ ist die x-Achse Asymptote des Graphen,

da der Nenner für $x \to \pm\infty$ unbeschränkt wächst.

(2) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot e^{-4x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$ da $e^{-4x^2} \neq 0$ für alle $x \in$ R. N(0|0) = S_y

Bestimmung der Extrempunkte:

$f'(x) = 2 \cdot e^{-4x^2} + 2x \cdot (-8x) \cdot e^{-4x^2} = \left(2 - 16x^2\right) \cdot e^{-4x^2}$ (Produkt-, Kettenregel)

Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 - 16x^2\right) \cdot e^{-4x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ liefert zwei

mögliche Extremstellen.

Mit $f'(x_e) = 0 \;\wedge\;$ Vorzeichenwechsel (–/+) der 1. Ableitung an der Stelle $x_{e1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

oder $f'(x_e) = 0 \;\wedge\; f''(x_e) \neq 0$ mit $f''(x) = \left(-48x + 128x^3\right) \cdot e^{-4x^2}$, konkret

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} > 0$, folgt: An der Stelle $x_{e1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ liegt ein lokales

Minimum mit $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx -0{,}43$ vor.

Der Graph besitzt den relativen Tiefpunkt $T\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \,\middle|\, -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung liegt folglich ein relativer Hochpunkt bei

$H\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \,\middle|\, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(3) Existenz von drei Wendepunkten:

Der (stetige) Graph von *f* besitzt drei Wendepunkte, denn:

- zwischen Minimum und Maximum muss der Graph sein Krümmungsverhalten ändern bzw. ein zu O(0/0) punktsymmetrischer Graph muss einen Wendepunkt im Ursprung besitzen,
- für $x \to \pm\infty$ ist die *x*-Achse Asymptote des Graphen; der Graph muss vor bzw. nach dem Extremum das Krümmungsverhalten ändern, da er die *x*-Achse nicht noch einmal schneidet.

Modelllösung b)

Allgemein gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks: $A(g,h) = \frac{g \cdot h}{2}$.

Für das beschriebene Dreieck gilt konkret: $g = u$; $h = f(u) = 2u \cdot e^{-4u^2}$, $u > 0$; daraus ergibt sich die Zielfunktion *A* mit $A(u) = u^2 \cdot e^{-4u^2}, u > 0$, und der Ableitung

$A'(u) = \left(2u - 8u^3\right) \cdot e^{-4u^2}$.

Bestimmung des Maximums:

Die notwendige Bedingung $A'(u) = 0 \Leftrightarrow 2u - 8u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 0{,}5 \vee u = -0{,}5$ liefert als mögliche Extremstelle $u = 0{,}5$, da $u > 0$.

$A''(u) = \left(2 - 40u^2 + 64u^4\right) \cdot e^{-4u^2}$. Aus $A'(0{,}5) = 0 \wedge A''(0{,}5) = -4 \cdot e^{-1} < 0$ folgt:

An der Stelle $u = 0{,}5$ hat die Funktion *A* das lokale Maximum $A(0{,}5) = 0{,}25 \cdot e^{-1} \approx 0{,}09$.

Überprüfung von *A* am Rand des Definitionsbereiches:

Für $u \to 0$ und für $u \to \infty$ gilt $A(u) \to 0$. Daher ist das lokale Maximum $A(0{,}5)$ auch globales Maximum.

Das rechtwinklige Dreieck hat also für $u = 0{,}5$ den größten Flächeninhalt. Dieser beträgt $0{,}25 \cdot e^{-1}$ FE.

Modelllösung c)

Durch $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{-4x^2}$ gegeben, wenn

$F'(x) = f(x)$ gilt.

Mit Kettenregel folgt: $F'(x) = -\frac{1}{4} \cdot (-8x) \cdot e^{-4x^2} = 2x \cdot e^{-4x^2} = f(x)$.

Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [0;2]:

$$A = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 2x \cdot e^{-4x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot e^{-16} + \frac{1}{4} \approx \frac{1}{4}$$

Bestimmung der Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [0;k] (k > 0):

Für immer größer werdende $k \in \mathbb{R}^+$ gilt $-\frac{1}{4} \cdot e^{-4k^2} \to 0$ und deshalb

$$A = \int_0^k f(x)\mathrm{d}x = \int_0^k \left(2x \cdot e^{-4x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}\right]_0^k = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4k^2} + \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}.$$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) weist die Punktsymmetrie zum Ursprung nach.	3 (II)
2	(1) untersucht das Unendlichkeitsverhalten.	4 (II)
3	(2) berechnet die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.	2 (I)
4	(2) berechnet die Ableitung.	3 (I)
5	(2) berechnet mögliche Extremstellen mit Hilfe des notwendigen Kriteriums.	3 (I)
6	(2) bestimmt die Extrempunkte.	7 (II)
7	(3) begründet die Existenz von drei Wendepunkten.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt einen Zielfunktionsterm.	3 (II)
2	bestimmt die lokale Maximalstelle.	5 (II)
3	berechnet den maximalen Flächeninhalt.	2 (I)
4	zeigt durch Untersuchung der Randbedingungen, dass das Maximum auch global ist.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass durch $F(x)$ eine Stammfunktion von f gegeben ist.	3 (II)
2	berechnet den Flächeninhalt.	5 (I)
3	begründet, dass sich der Flächeninhalt dem Wert 0,25 FE beliebig annähert.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) weist die Punktsymmetrie …	3 (II)			
2	(1) untersucht das Unendlichkeitsverhalten.	4 (II)			
3	(2) berechnet die Schnittpunkte …	2 (I)			
4	(2) berechnet die Ableitung.	3 (I)			
5	(2) berechnet mögliche Extremstellen …	3 (I)			
6	(2) bestimmt die Extrempunkte.	7 (II)			
7	(3) begründet die Existenz …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (26) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**26**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen Zielfunktionsterm.	3 (II)			
2	bestimmt die lokale …	5 (II)			
3	berechnet den maximalen …	2 (I)			
4	zeigt durch Untersuchung …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass durch …	3 (II)			
2	berechnet den Flächeninhalt.	5 (I)			
3	begründet, dass sich …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

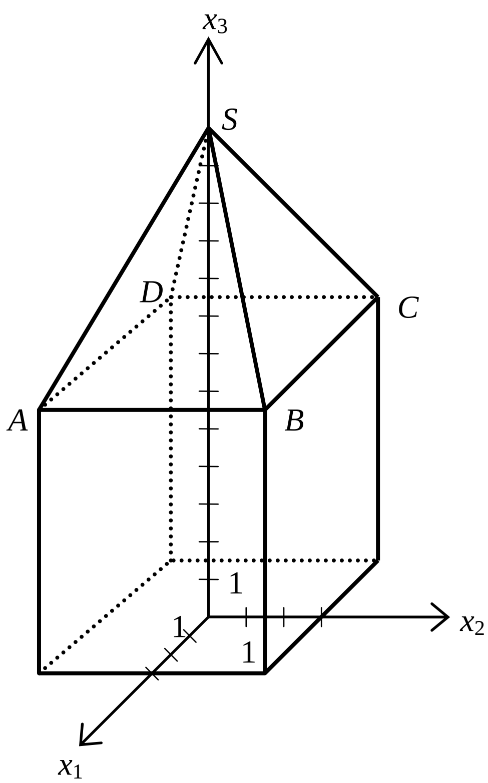
Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Auf einen Quader mit der Grundfläche in der x_1-x_2-Ebene ist eine Pyramide mit folgenden Eckpunkten aufgesetzt: $A(3\,|\,{-3}\,|\,7)$, $B(3\,|\,3\,|\,7)$, $C(-3\,|\,3\,|\,7)$, $D(-3\,|\,-3\,|\,7)$ und $S(0\,|\,0\,|\,13)$ (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Die Ebene E_1 verläuft durch die Mitte der Pyramidenkanten $\overline{SB}$ bzw. $\overline{SD}$ und den Punkt C. Die Pyramidenkante $\overline{AS}$ liegt auf einer Geraden g.

(1) *Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Parameterform.*

(2) *Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g an.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E_1 rechtwinklig schneidet.*
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in Koordinatenform. (12 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass es sich bei der Pyramide ABCDS um eine quadratische Pyramide handelt, und berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCDS.*

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Mantelfläche der Pyramide.* (14 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Dreiecksfläche *BCS* liegt in einer Ebene E_2.

(1) *Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Koordinatenform und zeigen Sie, dass die Punkte $F_1(0\,|\,1\,|\,11)$, $F_2(1\,|\,2\,|\,9)$ und $F_3(-1\,|\,2\,|\,9)$ in der Ebene E_2 liegen.*
[Zur Kontrolle: $E_2:\ 2x_2 + x_3 - 13 = 0$]

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck $F_1F_2F_3$ gleichschenklig ist.* (13 Punkte)

d) Die Gerade *h* ist durch folgende Gleichung gegeben: $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

(1) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes L der Geraden h mit der Ebene E_2 aus Teilaufgabe c)(1).*
[Zur Kontrolle: $L\left(1\frac{1}{3}\,|\,1\frac{1}{3}\,|\,10\frac{1}{3}\right)$]

(2) *Weisen Sie nach, dass der Punkt L auf der Seitenkante $\overline{BS}$ des Dreiecks BCS liegt.*
(11 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Mitte von $\overline{SB}$: $M_{SB}(1,5|1,5|10)$; Mitte von $\overline{SD}$: $M_{SD}(-1,5|-1,5|10)$

Als Parametergleichung von E_1 ergibt sich: $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) Als Geradengleichung ergibt sich: $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

(3) E_1 und g schneiden sich rechtwinklig, da gilt:

$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.$

Für die Koordinatenform von E_1 ergibt sich: E_1: $3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 60 = 0$.

Modelllösung b)

(1) Da $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 6$, ist ABCD eine Raute. Da außerdem

$\overrightarrow{AB}$ senkrecht zu $\overrightarrow{BC}$ (rechnerisch: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$), ist ABCD ein Quadrat und damit ist ABCDS eine quadratische Pyramide.

Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$; aus $G = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = 36$ und $h = \left|\overrightarrow{M_{ABCD}S}\right| = 6$

ergibt sich für das Volumen der Pyramide $V = 72$ VE.

(2) Da die Spitze S der Pyramide senkrecht über der Mitte M_{ABCD} des Quadrates ABCD liegt, besteht die Mantelfläche der Pyramide aus vier deckungsgleichen Dreiecken.

Mit $M_{AB}(3|0|7)$ beträgt der Flächeninhalt A_D einer Seitenfläche der Pyramide

$A_D = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{M_{AB}S}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| = 9 \cdot \sqrt{5}$.

Für die gesamte Mantelfläche der Pyramide ergibt sich ein Flächeninhalt von

$A_{Mantel} = 4 \cdot A_D = 36 \cdot \sqrt{5} \approx 80{,}50$ (FE) .

Modelllösung c)

(1) Aus der Parametergleichung $E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine Koordinatenform der Ebenengleichung von E_2: $2x_2 + x_3 - 13 = 0$.
Durch Punktprobe in die Koordinatenform der Ebenengleichung für E_2 erfolgt der Nachweis, dass die Punkte F_1, F_2 und F_3 in der Ebene E_2 liegen.

(2) Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck, da $\left|\overrightarrow{F_1F_3}\right| = \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{6}$.

Modelllösung d)

(1) Durch Einsetzen der Geradengleichung von h in die Koordinatengleichung von E_2 ergibt sich der Durchstoßpunkt $L(\frac{4}{3} | \frac{4}{3} | \frac{31}{3})$, denn aus $2(5+11t)+(15+14t)-13=0$ folgt $t = -\frac{1}{3}$.

(2) Durch Gleichsetzen der Koordinaten von L mit der Geradengleichung der Seitenkante $\overline{BS}$ des Dreiecks BCS $\begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \\ 10\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ folgt für den Parameter $s = \frac{5}{9}$.

Wegen $0 \leq s \leq 1$ liegt der Punkt L auf der Seitenkante $\overline{BS}$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet eine Ebenengleichung für die Ebene E_1 in Parameterform (unter Benutzung der Seitenmitten der beiden Pyramidenkanten).	4 (I)
2	gibt eine Gleichung für die Gerade g an.	2 (I)
3	zeigt, dass sich g und E_1 rechtwinklig schneiden.	2 (II)
4	ermittelt eine Gleichung für Ebene E_1 in Koordinatenform (mit bekanntem Normalenvektor).	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	zeigt, dass die Pyramide quadratisch ist.	4 (II)
2	berechnet das Volumen der Pyramide.	4 (I)
3	bestimmt den Flächeninhalt der Mantelfläche der Pyramide.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet eine Ebenengleichung für Ebene E_2 in Koordinatenform.	7 (I)
2	zeigt, dass die Punkte F_1, F_2 und F_3 in der Ebene E_2 liegen.	3 (II)
3	zeigt, dass das Dreieck $F_1F_2F_3$ gleichschenklig ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	bestimmt die Koordinaten des Punktes L in der Ebene E_2.	5 (II)
2	weist nach, dass der Punkt L auf der Seitenkante $\overline{BS}$ des Dreiecks BCS liegt.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet eine Ebenengleichung …	4 (I)			
2	gibt eine Gleichung …	2 (I)			
3	zeigt, dass sich …	2 (II)			
4	ermittelt eine Gleichung …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass die …	4 (II)			
2	berechnet das Volumen …	4 (I)			
3	bestimmt den Flächeninhalt …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet eine Ebenengleichung …	7 (I)			
2	zeigt, dass die …	3 (II)			
3	zeigt, dass das …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Koordinaten …	5 (II)			
2	weist nach, dass …	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei Z ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}_Z$, und k sei eine positive reelle Zahl. Dann heißt die Abbildung f eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k, wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f(\vec{x}) - \vec{x}_Z = k(\vec{x} - \vec{x}_Z)$.

a) Gegeben ist die zentrische Streckung f_1 mit dem Zentrum $Z_1(3\,|\,4)$ und dem Streckfaktor $k_1 = 3$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung f_1 *durch* $f_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ *beschrieben wird.*

Berechnen Sie bezüglich der Abbildung f_1 *die Koordinaten der Bildpunkte* A' *und* B' *der Punkte* $A(-1\,|\,3)$ *und* $B(4\,|\,0)$.

[Zur Kontrolle: $A'(-9\,|\,1)$, $B'(6\,|\,-8)$]

Zeichnen Sie die Punkte A, B, A' *und* B' *in ein geeignetes Koordinatensystem.*

Zeigen Sie, dass Z_1 *der einzige Punkt ist, der durch* f_1 *auf sich selbst abgebildet wird.*

(15 Punkte)

b) *Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden* g_{AB} *durch A und B und* $g_{A'B'}$ *durch* A' *und* B'. *Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt des Vierecks* $A'B'BA$.

(15 Punkte)

c) Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie geometrisch, dass diese Gerade durch die Abbildung f_1 *auf sich selbst abgebildet wird. Weisen Sie dieses auch rechnerisch nach.* (11 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben sind die Punkte $P(-1|2)$ und $P'(-1|6)$.
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden $g_{PP'}$ durch P und P' und der Geraden
q: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$.

Bei einer zentrischen Streckung f_2 wird der Punkt P auf den Punkt P' abgebildet, und das Zentrum Z_2 liegt auf der Geraden q.

Bestimmen Sie die Gleichung von f_2 in Matrixform. (9 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Es gilt $f_1(\vec{x})-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=3\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$. Also ist $f_1(\vec{x})=3\vec{x}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$. Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Man erhält $\vec{x}_{A'}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_{B'}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$.

Der Prüfling zeichnet die in der Aufgabenstellung genannten Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem.

F ist genau dann ein Fixpunkt der Abbildung f_1, wenn Folgendes gilt:

$\vec{x}_F=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}_F+\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$, d. h. $\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}_F=\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix}$. Dieses LGS hat die einzige Lösung $\vec{x}_F=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Damit ist das Zentrum Z_1 der einzige Fixpunkt der Abbildung f_1.

Modelllösung b)

Die Gerade g_{AB} bzw. $g_{A'B'}$ hat die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$, $r\in\mathbb{R}$, bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$. Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}15\\-9\end{pmatrix}$ sind kollinear, aber der Differenzvektor $\begin{pmatrix}-9\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ sind nicht kollinear. Also sind die beiden Geraden echt parallel. Folglich ist das Viereck $A'B'BA$ ein Trapez.

Es sei *d* der Abstand des Punktes *A* von der Geraden $g_{A'B'}$. Dann erhält man für den Flächeninhalt *F* des genannten Trapezes: $F=\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{A'B'}\right|\right)d$.

Bestimmung von *d*:

Es sei *l* das Lot von *A* auf $g_{A'B'}$. Dann hat *l* die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$.

S sei der Schnittpunkt der Geraden *l* und $g_{A'B'}$. Ein Standardverfahren ergibt $S(-4\,|\,-2)$.

Man erhält $d=\left|\overrightarrow{AS}\right|=\sqrt{34}$ LE.

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{34}$ LE und $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=3\sqrt{34}$ LE erhält man $F=68$ FE.

Modelllösung c)

Geometrische Begründung:

Offensichtlich verläuft die Gerade g durch das Zentrum Z_1. Es sei P ein Punkt von g. Dann liegt wegen $Z_1 \in g$ der Differenzvektor $\vec{x}_{\mathrm{P}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$ auf g. Ist P' das Bild von P bzgl. der Abbildung f_1, so ist nach Definition der zentrischen Streckung $\vec{x}_{\mathrm{P'}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$ das 3-Fache von $\vec{x}_{\mathrm{P}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$. Folglich liegt P' auf der Geraden g.

Sei nun Q ein Punkt von g. Dann liegt (analog wie oben) der Differenzvektor $\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$ auf g. Nun gibt es (genau) einen Punkt R auf g, so dass $\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$ das 3-Fache von $\vec{x}_{\mathrm{R}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_1}$ ist.

Also wird R durch f_1 auf Q abgebildet.

Insgesamt gesehen folgt die Behauptung.

Rechnerischer Nachweis:

Der Punkt R mit dem Ortsvektor $\vec{x}_{\mathrm{R}}$ liegt genau dann auf der Geraden g, wenn es $r \in \mathbb{R}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gibt. Nun ist

$$f_1(\vec{x}_{\mathrm{R}}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Also bildet f_1 die Gerade g auf die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, ab. Mit einem Standardargument folgt $g = h$.

Modelllösung d)

$g_{\mathrm{PP'}}$ hat die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Ein Standardverfahren ergibt $T(-1 \mid 1)$ als Schnittpunkt der Geraden $g_{\mathrm{PP'}}$ und q.

Aus der Definition des Begriffs *zentrische Streckung* in der Aufgabenstellung ergibt sich, dass die Punkte Z_2, P und P' auf einer Geraden liegen. Aufgrund der Aufgabenstellung ist das Zentrum Z_2 dann der Schnittpunkt T der Geraden $g_{\mathrm{PP'}}$ und q.

Aus $\vec{x}_{\mathrm{P'}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_2} = k\left(\vec{x}_{\mathrm{P}} - \vec{x}_{\mathrm{Z}_2}\right)$ folgt $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist $k = 5$.

Man erhält insgesamt $f_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
	Der Prüfling	
1	zeigt, dass die Abbildung f_1 die angegebene Gleichung besitzt.	3 (II)
2	berechnet die Koordinaten der Bildpunkte A' und B'.	6 (I)
3	zeigt, dass Z_1 der einzige Punkt ist, der durch f_1 auf sich selbst abgebildet wird.	4 (II)
4	zeichnet die in der Aufgabenstellung genannten Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	untersucht die Lagebeziehung der Geraden g_{AB} und $g_{A'B'}$.	5 (II)
2	berechnet den Flächeninhalt des Vierecks $A'B'BA$.	10 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	begründet geometrisch, dass die Gerade g durch die Abbildung f_1 auf sich selbst abgebildet wird.	5 (II)
2	weist die angegebene Eigenschaft rechnerisch nach.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

1 AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Schnittpunkt der Geraden $g_{PP'}$ und q.	3 (II)
2	bestimmt die Gleichung von f_2 in Matrixform.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass die …	3 (II)			
2	berechnet die Koordinaten …	6 (I)			
3	zeigt, dass Z_1 …	4 (II)			
4	zeichnet die in …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht die Lagebeziehung …	5 (II)			
2	berechnet den Flächeninhalt …	10 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	begründet geometrisch, dass …	5 (II)			
2	weist die angegebene …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt den Schnittpunkt …	3 (II)			
2	bestimmt die Gleichung …	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen der Automobil-Zulieferindustrie produziert an einem Standort A elektronische Bauteile für Personenkraftwagen. Um seine Wirtschaftlichkeit zu erhöhen, möchte das Unternehmen einen Teil der 1200 Mitarbeiter, die in der Produktion arbeiten, langfristig in zwei andere Standorte B und C verlegen. Da diese Standorte attraktiver sind, finden sich dauerhaft genügend Freiwillige. Einige der nach Standort B und C versetzten Mitarbeiter sollen nach gewisser Zeit zurück zum Standort A kommen, um Wissenstransfer zu gewährleisten. Im Sinne einer langfristigen Personalentwicklungsplanung legt die Firma Quoten für den Wechsel der Standorte fest, die über mehrere Jahre stabil bleiben.

Das Unternehmen setzt daher folgende Übergangsmatrix *M* fest:

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{Von:}\quad \text{A} \qquad \text{B} \qquad \text{C} \\ & \text{A} & \\ \textbf{Nach:} & \text{B} & M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \\ & \text{C} & \end{array}$$

a) *Stellen Sie die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen in einem Übergangsdiagramm dar und erklären Sie am Beispiel einer Zeile und einer Spalte von M, wie sich die Mitarbeiterzahlen innerhalb eines Jahres entwickeln werden.* (8 Punkte)

b) Zu Beginn arbeiten sämtliche 1200 Mitarbeiter am Standort A.

Berechnen Sie die Verteilung auf die Standorte A, B und C nach einem und nach zwei Jahren. (6 Punkte)

Name: ____________________

c) *Berechnen Sie* M^2 *und interpretieren Sie die Koeffizienten dieser Matrix im Anwendungszusammenhang.* (8 Punkte)

d) Es gilt: $M^{10} = \begin{pmatrix} 0{,}255 & 0{,}249 & 0{,}248 \\ 0{,}382 & 0{,}426 & 0{,}230 \\ 0{,}363 & 0{,}325 & 0{,}522 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Matrix bezüglich der Entwicklung der Mitarbeiterzahlen der Standorte A, B und C im Unternehmen. (8 Punkte)

e) *Untersuchen Sie, ob es eine Verteilung mit insgesamt 1200 Mitarbeitern gibt, die im nächsten Jahr gleich bleibt. Falls ja, geben Sie diese Verteilung an.* (10 Punkte)

f) *Untersuchen Sie, ob eine Verteilung von jeweils 400 Mitarbeitern, die in den Standorten A, B und C arbeiten, aus der Verteilung des Vorjahres entstanden sein kann. Falls ja, bestimmen Sie diese.* (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

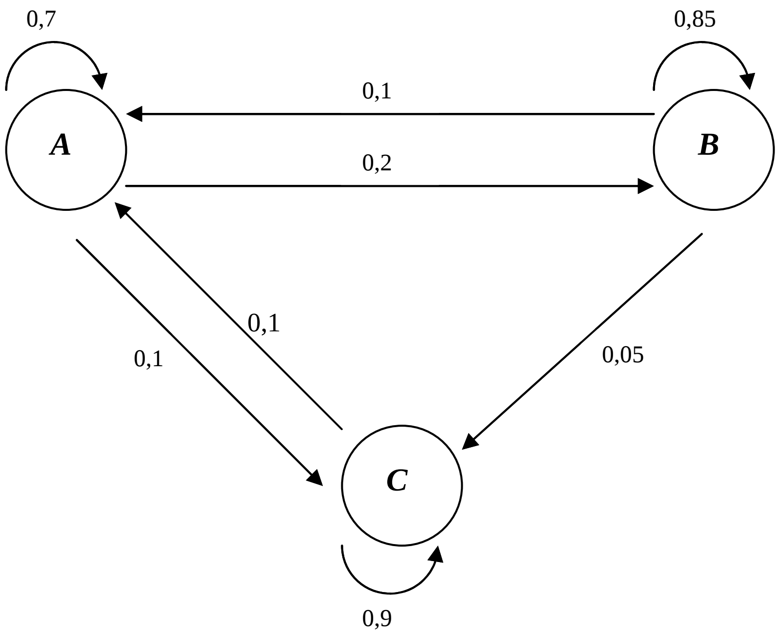
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Ein mögliches Übergangsdiagramm:



Beispielsweise bedeutet die 1. Spalte der Matrix *M*, dass 70 % an ihrem Standort A bleiben, 20 % von A zu Standort B und 10 % von A zu Standort C wechseln.
Die 2. Zeile der Matrix *M* bedeutet, dass 20 % von A zu Standort B wechseln, 85 % an ihrem Standort B bleiben und keiner von C zu Standort B wechselt.

Modelllösung b)

Der Startvektor lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Verteilung nach einem Jahr: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix}$

Verteilung nach zwei Jahren: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 840 \\ 240 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 372 \\ 204 \end{pmatrix}$

Modelllösung c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}16 & 0{,}16 \\ 0{,}31 & 0{,}7425 & 0{,}02 \\ 0{,}17 & 0{,}0975 & 0{,}82 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix gibt an, welcher Prozentsatz der Mitarbeiter eines jeden Standortes nach jeweils 2 Jahren zu den jeweiligen anderen Standorten übergeht.

Modelllösung d)

Die Matrix beschreibt die Übergangsquoten für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Da die 1. Zeile aus nahezu identischen Zahlen besteht (ca. 0,25), kann man davon ausgehen, dass etwa 25 % der Mitarbeiter, also ca. 300, nach 10 Jahren im Standort A arbeiten werden und sich diese Zahl unter den gegebenen Bedingungen auch nicht mehr wesentlich ändern wird. Die Zahlen der übrigen Zeilen lassen einen so konkreten Schluss nicht zu, weil sie noch nicht stabilisiert erscheinen.

Alternative Lösung, die auch anerkannt wird:
Die Matrix soll die Übergangsquoten für einen Zeitraum von 10 Jahren beschreiben, aber es ist fraglich, ob die Firma wirklich so lange im Voraus planen kann. Sicherlich wird sich irgendetwas verändern.

Modelllösung e)

Ansatz über das lineare Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liefert:

$$\left| \begin{array}{c} -0{,}3x + 0{,}1y + 0{,}1z = 0 \\ 0{,}2x - 0{,}15y = 0 \\ 0{,}1x + 0{,}05y - 0{,}1z = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x = 0{,}75y \\ z = 1{,}25y \end{array} \right|$$

Da $x + y + z = 0{,}75y + y + 1{,}25y = 1200$ gilt, ändert sich die Verteilung zu $x = 300$, $y = 400$ und $z = 500$ in den Folgejahren nicht mehr.

Modelllösung f)

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}1z = 400 \\ 0{,}2x + 0{,}85y = 400 \\ 0{,}1x + 0{,}05y + 0{,}9z = 400 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 7x + y + z = 4000 \\ 2x + 8{,}5y = 4000 \\ -62x - 8{,}5y = -32000 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 7x + y + z = 4000 \\ 2x + 8{,}5y = 4000 \\ -60x = -28000 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x = 466{,}67 \\ y = 360{,}78 \\ z = 372{,}55 \end{matrix}$$

Damit existiert eine solche Verteilung mit $0 < x, y, z < 1200$ und $x + y + z = 1200$,

ganzzahlig gerundet: $x = 467$; $y = 361$; $z = 372$

Exaktes Ergebnis liefert auch: $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 466{,}667 \\ 360{,}784 \\ 372{,}549 \end{pmatrix}$

Alternative Antwort: Da die berechnete Lösung nicht ganzzahlig ist, gab es eine solche Verteilung nicht.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	stellt die Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar.	4 (I)
2	erklärt eine Zeile und eine Spalte der Matrix *M*.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt den Startvektor an.	2 (I)
2	berechnet die Verteilung des 1. Folgejahres.	2 (I)
3	berechnet die Verteilung des 2. Folgejahres.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt das Matrizenprodukt M^2.	4 (II)
2	interpretiert die Koeffizienten von M^2.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die Bedeutung der Matrix M^{10} an.	2 (I)
2	interpretiert die 1. Zeile von M^{10}.	3 (III)
3	interpretiert die 2. und die 3. Zeile von M^{10}.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	untersucht die Problemstellung mit Hilfe eines LGS.	2 (II)
2	bestimmt die Lösung des LGS.	6 (II)
3	gibt die Verteilung an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt ein LGS zur Untersuchung der Fragestellung.	3 (II)
2	zeigt die Lösbarkeit des LGS.	5 (II)
3	gibt die ganzzahlige Lösung an bzw. gibt an, dass wegen der Nicht-Ganzzahligkeit keine Lösung existiert.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt die Entwicklung …	4 (I)			
2	erklärt eine Zeile …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt den Startvektor …	2 (I)			
2	berechnet die Verteilung …	2 (I)			
3	berechnet die Verteilung …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt das Matrizenprodukt …	4 (II)			
2	interpretiert die Koeffizienten …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Bedeutung …	2 (I)			
2	interpretiert die 1. Zeile …	3 (III)			
3	interpretiert die 2. und …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht die Problemstellung …	2 (II)			
2	bestimmt die Lösung …	6 (II)			
3	gibt die Verteilung …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt ein LGS …	3 (II)			
2	zeigt die Lösbarkeit …	5 (II)			
3	gibt die ganzzahlige …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Die Shell-Jugendstudie 2006 macht Untersuchungen zum Gesundheitsverhalten der Jugendlichen.

Der Studie ist zu entnehmen, dass 50 % der weiblichen Jugendlichen mit ihrem Gewicht unzufrieden sind, bei den männlichen Jugendlichen sind 40 % mit ihrem Gewicht unzufrieden.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die empirisch gewonnenen relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten angesehen werden können.

a) 100 zufällig ausgewählte männliche Jugendliche werden gefragt, ob sie mit ihrem Gewicht unzufrieden sind.

(1) *Begründen Sie, dass sich dieser Sachverhalt durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschreiben lässt.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig ausgewählten männlichen Jugendlichen höchstens 40 mit ihrem Gewicht unzufrieden sind.*

(3) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig ausgewählten männlichen Jugendlichen mindestens 30 und höchstens 40 mit ihrem Gewicht unzufrieden sind.* (9 Punkte)

b) *Ermitteln Sie die Mindest-Anzahl von männlichen Jugendlichen, die man befragen muss, damit mit 99,5-prozentiger Wahrscheinlichkeit mindestens einer der Befragten mit seinem Gewicht unzufrieden ist.* (8 Punkte)

Name: ____________________

c) In einer repräsentativen Studie werden 500 Jugendliche (Mädchen und Jungen) befragt, ob sie mit ihrem Gewicht zufrieden sind. Geht man von den in der Shell-Jugendstudie ermittelten Daten aus, so ist zu erwarten, dass 229 der befragten Jugendlichen (Mädchen und Jungen) die Frage mit „nein" beantworten werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Mädchen und die Anzahl der Jungen unter den 500 Jugendlichen, die in der Studie befragt werden. (9 Punkte)

d) Die repräsentative Umfrage hat außerdem Folgendes ergeben:

- 15 % aller befragten männlichen Jugendlichen sind mit ihrem Gewicht zufrieden und sind Raucher.
- Von den männlichen Jugendlichen, die mit ihrem Gewicht unzufrieden sind, sind 30 % Raucher.

Beurteilen Sie, ob die beiden Merkmale „Ein männlicher Jugendlicher ist ein Raucher" und „Ein männlicher Jugendlicher ist mit seinem Gewicht unzufrieden" stochastisch unabhängig sind. (10 Punkte)

e) Eine Betriebskrankenkasse will 100 zufällig ausgewählte, weibliche jugendliche Mitglieder befragen, ob sie mit ihrem Gewicht unzufrieden sind. Die Krankenkasse will dazu die Hypothese H_0: $p \geq 0{,}5$ gegen die Hypothese H_1: $p < 0{,}5$ testen.

(1) *Beschreiben Sie, welche Vermutung die Betriebskrankenkasse mit ihrer Hypothesenwahl nachweisen möchte.*

(2) *Bestimmen Sie für den dargestellten Hypothesentest eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.*

(3) *Bestimmen Sie für die von Ihnen ermittelte Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit, mit der die Hypothese „Mindestens 50 % der Mädchen sind mit ihrem Gewicht unzufrieden" beibehalten wird, obwohl tatsächlich nur 40 % der Mädchen mit ihrem Gewicht unzufrieden sind.* (14 Punkte)

Name: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \; = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5 = *p*	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \; = \; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36								0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
					p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	*k*	*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		*p* = 0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0064	173	
	27			0,9566	0,0110	172	
	28			0,9729	0,0179	171	
	29			0,9837	0,0283	170	
	30			0,9905	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,0899	167	
	33			0,9985	0,1239	166	
	34			0,9992	0,1656	165	
	35			0,9996	0,2151	164	
	36			0,9998	0,2717	163	
	37			0,9999	0,3345	162	
	38				0,4019	161	
	39				0,4718	160	
	40				0,5422	159	
	41				0,6108	158	
	42				0,6758	157	
	43				0,7355	156	
	44				0,7887	155	
	45				0,8349	154	
	46				0,8738	153	
	47				0,9056	152	
	48				0,9310	151	
	49				0,9506	150	
	50				0,9655	149	
	51				0,9764	148	
	52				0,9843	147	
	53				0,9897	146	
	54				0,9934	145	
	55				0,9959	144	
	56				0,9975	143	
	57				0,9985	142	
	58				0,9991	141	
	59				0,9995	140	
	60				0,9997	139	
	61				0,9998	138	
	62				0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	*k*	*n*
		p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der männlichen Jugendlichen, die mit ihrem Gewicht unzufrieden sind. Es werden $n = 100$ Zufallsversuche unabhängig voneinander durchgeführt. Die Ergebnismenge für einen Versuch wird jeweils durch zwei Ergebnisse „zufrieden“ und „nicht zufrieden“ dargestellt. Da die männlichen Jugendlichen zufällig ausgewählt wurden, darf p für jeden Zufallsversuch als gleich angenommen werden. X ist demnach $B_{100;0,4}$-verteilt.

(2) Man entnimmt der beigefügten Tabelle: $P(X \le 40) = 54{,}33\,\%$.

(3) Mit der Tabelle ergibt sich: $P(30 \le X \le 40) = P(X \le 40) - P(X \le 29) = 52{,}85\,\%$.

Modelllösung b)

Sei n die gesuchte Anzahl von männlichen Jugendlichen.

$$
\begin{aligned}
P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^n &\ge 0{,}995 \\
&\Rightarrow 0{,}6^n \le 0{,}005 \\
&\Rightarrow n \lg(0{,}6) \le \lg(0{,}005) \\
&\Rightarrow n \ge 10{,}37
\end{aligned}
$$

Mindestens 11 männliche Jugendliche müssen also befragt werden.

Alternativ kann die Lösung auch durch Probieren gefunden werden. Die Vorgehensweise muss dafür hinreichend protokolliert werden.

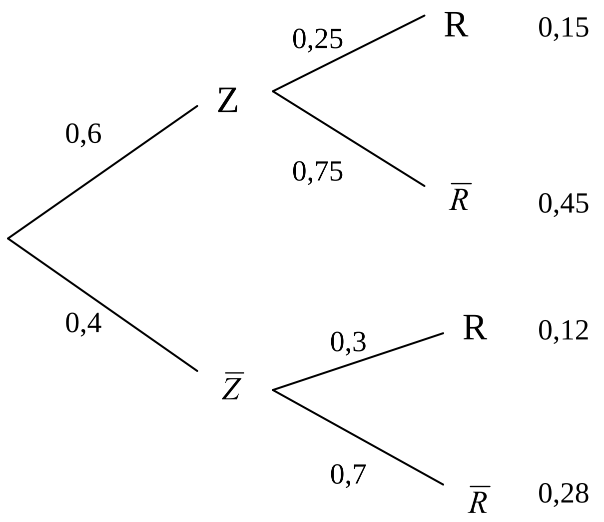
Modelllösung c)

Sei j die Anzahl der Jungen und m die Anzahl der Mädchen, so ist $0{,}5m + 0{,}4j = 229$ der Erwartungswert der Zufallsgröße X. Es ergibt sich so das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} m + j = 500 \\ 0{,}5m + 0{,}4j = 229 \end{array} \right|$$ mit den Lösungen $j = 210$ und $m = 290$.

Modelllösung d)

Es sei R das Ereignis „Ein männlicher Jugendlicher ist Raucher" und Z das Ereignis „Ein männlicher Jugendlicher ist mit seinem Gewicht zufrieden".



Der Stichprobenumfang erlaubt es nicht, die Anteile als Schätzer für Wahrscheinlichkeiten zu verwenden. Der einfachen Darstellung halber wird hier trotzdem das Symbol $P(\ldots)$ verwendet.

Dem Aufgabentext entnimmt man $P(Z \cap R) = 0{,}15$. Damit sind $P_Z(R) = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$ und $P_Z(\overline{R}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Also ist $P_{\overline{Z}}(R) = 0{,}3 \neq 0{,}25 = P_Z(R)$. Es ergibt sich also, dass von den männlichen Jugendlichen, die mit ihrem Gewicht unzufrieden sind, ein höherer Prozentsatz raucht als von denen, die mit ihrem Gewicht zufrieden sind. Damit sind die Merkmale R und Z stochastisch abhängig.

Alternativ kann man $P_Z(R)$ mit Hilfe der Regel von Bayes ermitteln:

$$P_Z(R) = \frac{P(Z \cap R)}{P(Z)} = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25 .$$

Modelllösung e)

(1) Da die Krankenkasse die Hypothese $H_0 : p \geq 0,5$ gegen die Hypothese $H_1 : p < 0,5$ testen will, will sie nachweisen, dass – abweichend von den Ergebnissen der Shellstudie – tatsächlich weniger als $50\,\%$ der bei ihr versicherten jugendlichen Mädchen mit ihrem Gewicht unzufrieden sind.

(2) Die Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,5$ liefert $P(X \leq 42) = 6,66\,\%$ und $P(X \leq 41) = 4,43\,\%$. Damit lautet die Entscheidungsregel, dass höchstens 41 Mädchen die Frage, ob sie mit ihrem Gewicht unzufrieden sind, mit *ja* beantworten dürfen, damit die Hypothese H_0 abgelehnt werden kann.

Alternativ kann man den Annahmebereich der Hypothese H_0 auch mittels $[\mu - 1,64\sigma; 100] = [41,8; 100]$ ermitteln, da $\sigma > 3$.

(3) Es handelt sich um einen Fehler 2. Art (β-Fehler). Grundlage ist die $B_{100;0,4}$-Verteilung. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Mädchen mindestens 42 beträgt, also im Annahmebereich der Hypothese H_0 liegt.
$P(X \geq 42) = 1 - P(X \leq 41) = 1 - 0,6225 = 37,75\,\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $37,75\,\%$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]**
1	(1) begründet, dass es sich bei dem dargestellten Sachverhalt um eine binomialverteilte Zufallsgröße handelt.	3 (II)
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3 (I)
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz für die gesuchte Anzahl *n* von männlichen Jugendlichen.	4 (II)
2	ermittelt *n* mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen *Term* für den Erwartungswert der Zufallsgröße.	3 (II)
2	beschreibt das Problem durch ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.	3 (II)
3	berechnet die Lösungen des Gleichungssystems mit einem geeigneten Verfahren.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_Z(R)$.	5 (II)
2	beurteilt durch geeignete Rechnungen oder Begründungen, dass die beiden Ereignisse *Z* und *R* stochastisch abhängig sind.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) beschreibt, welche Vermutung die Krankenkasse nachweisen will.	4 (II)
2	(2) formuliert eine Entscheidungsregel, bei der in der Antwort auf den Kontext der Aufgabe wieder Bezug genommen wird.	5 (II)
3	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass es …	3 (II)			
2	(2) berechnet die gesuchte …	3 (I)			
3	(3) berechnet die gesuchte …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz …	4 (II)			
2	ermittelt n mit …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen *Term* …	3 (II)			
2	beschreibt das Problem …	3 (II)			
3	berechnet die Lösungen …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die bedingte …	5 (II)			
2	beurteilt durch geeignete …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt, welche Vermutung …	4 (II)			
2	(2) formuliert eine Entscheidungsregel …	5 (II)			
3	(3) bestimmt die gesuchte …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung

Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeit der Blutgruppen in Deutschland in Prozent.

Blutgruppe	A	0	B	AB
Rh+	37	35	9	4
Rh–	6	6	2	1

Quelle: Wikipedia.org/wiki/Blutgruppen

Die Universitätsklinik einer deutschen Großstadt ruft zur Blutspende auf.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass*
   (1) *von 90 Spendern höchstens einer die Blutgruppe A Rh– besitzt,*
   (2) *von 100 Spendern mindestens 5 die Blutgruppe AB besitzen.* (8 Punkte)

b) *Ermitteln Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einmal die seltene Blutgruppe AB Rh– zu erhalten.*
(8 Punkte)

c) Nach Angaben der Deutschen Diabetes-Union beträgt der Anteil der Diabetiker an der Bevölkerung etwa 8 %. Bei der Blutspende werden alle Spender mit einem Schnelltest auf Diabetes untersucht. Dabei werden an Diabetes Erkrankte mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % erkannt, während 2 % als Diabetiker eingestuft werden, obwohl sie nicht erkrankt sind.

   Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertabelle dar. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

   E_1: Das Testergebnis lautet „kein Diabetiker“.

   E_2: Ein als Diabetiker eingestufter Spender ist in Wirklichkeit nicht erkrankt.
(12 Punkte)

Name: ____________________

d) Im Monat Dezember erhalten die Spender außer der Aufwandsentschädigung auch ein kleines Päckchen mit Süßigkeiten des lokalen Süßwarenfabrikanten. Besonders begehrt sind die Champagnertrüffel, die aber wegen ihres Preises nicht in jedem Päckchen vorhanden sind.

Ermitteln Sie, wie groß der Anteil an Päckchen mit Champagnertrüffeln sein muss, damit mit mindestens 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit in mindestens einem von zwanzig Päckchen diese Trüffel gefunden werden. (10 Punkte)

e) Es ist bekannt, dass in Europa der Anteil der Personen mit der Blutgruppe B zwischen 5 % und 15 % liegt. Bei einer Untersuchung an einer europäischen Klinik wurde unter 200 Personen bei 17 die Blutgruppe B festgestellt.

Untersuchen Sie, für welche Werte des tatsächlichen (unbekannten) Anteils p von Personen mit der Blutgruppe B das Ergebnis der Untersuchung um höchstens $2 \cdot \sigma_X$ *vom Erwartungswert* μ_X *abweicht.* (12 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36								0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
					p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	*k*	*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0064	173	
	27			0,9566	0,0110	172	
	28			0,9729	0,0179	171	
	29			0,9837	0,0283	170	
	30			0,9905	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,0899	167	
	33			0,9985	0,1239	166	
	34			0,9992	0,1656	165	
	35			0,9996	0,2151	164	
	36			0,9998	0,2717	163	
	37			0,9999	0,3345	162	
	38				0,4019	161	
	39				0,4718	160	
	40				0,5422	159	
	41				0,6108	158	
	42				0,6758	157	
	43				0,7355	156	
	44				0,7887	155	
	45				0,8349	154	
	46				0,8738	153	
	47				0,9056	152	
	48				0,9310	151	
	49				0,9506	150	
	50				0,9655	149	
	51				0,9764	148	
	52				0,9843	147	
	53				0,9897	146	
	54				0,9934	145	
	55				0,9959	144	
	56				0,9975	143	
	57				0,9985	142	
	58				0,9991	141	
	59				0,9995	140	
	60				0,9997	139	
	61				0,9998	138	
	62				0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	*k*	*n*
				p			

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Zufallsvariable X_1 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe A Rh– unter 90 Spendern. X_1 ist $B_{90;\,0{,}06}$-verteilt:

$P(X_1 \leq 1) = 0{,}94^{90} + 90 \cdot 0{,}94^{89} \cdot 0{,}06 \approx 0{,}0257$.

(2) Die Zufallsvariable X_2 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB unter 100 Spendern. X_2 ist $B_{100;\,0{,}05}$-verteilt:

$P(5 \leq X_2) = 1 - P(X_2 \leq 4) \approx 0{,}564$.

Modelllösung b)

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB Rh–.

X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}01$. Zu bestimmen ist n aus

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}99$

$$\Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}99^n < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}99} \approx 458{,}21.$$

Man benötigt mindestens 459 Spender, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB Rh– zu erhalten.

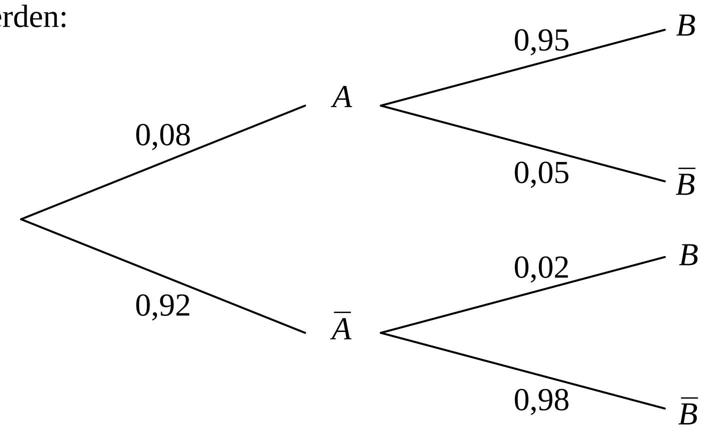
Modelllösung c)

Betrachtet werden die Ereignisse:

A: Ein Spender hat Diabetes.

B: Ein Spender wird als Diabetiker eingestuft.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1 und E_2 kann ein Baumdiagramm erstellt werden:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1, dass ein Spender nicht als Diabetiker eingestuft wird, ist:

$P(E_1) = P(\overline{B}) = 0{,}08 \cdot 0{,}05 + 0{,}92 \cdot 0{,}98 = 0{,}9056 \approx 91\ \%$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2, dass ein als Diabetiker eingestufter Spender nicht an Diabetes erkrankt, ist:

$P(E_2) = P_B(\overline{\mathrm{A}}) = \dfrac{0{,}92 \cdot 0{,}02}{0{,}0944} = 0{,}1949 \approx 19\ \%$.

$P(E_2)$ kann auch durch ein „umgekehrtes“ Baumdiagramm ermittelt werden.

Modelllösung d)

Die Zufallsgröße X (Anzahl der Päckchen, die Trüffel enthalten) ist binomial verteilt mit $n = 20$. Zu bestimmen ist der Anteil p aus

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - (1-p)^{20} \geq 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)^{20} \leq 0{,}10$

$\Leftrightarrow \quad 1 - p \leq \sqrt[20]{0{,}10} \qquad \Leftrightarrow \quad p \geq 1 - \sqrt[20]{0{,}10} \approx 0{,}1087.$

Der Anteil der Trüffel muss mindestens etwa 11 % betragen.

Modelllösung e)

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der Personen mit Blutgruppe B“ ist $B_{200;p}$-verteilt mit unbekanntem p.

Zu bestimmen ist p aus $\mu_X - 2 \cdot \sigma_X \leq X = 17 \leq \mu_X + 2 \cdot \sigma_X$

$$\Leftrightarrow \quad 200 \cdot p - 2 \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} \leq 17 \text{ und } 200 \cdot p + 2 \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} \geq 17$$

$$\Rightarrow \quad 800p(1-p) \geq (200p - 17)^2$$

Durch Lösen der quadratischen Ungleichung erhält man

$$40800p^2 - 7600p + 289 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 - \frac{19}{102}p + \frac{289}{40800} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p \leq 0{,}0931 + 0{,}0399 \text{ und } p \geq 0{,}0931 - 0{,}0399$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}0532 \leq p \leq 0{,}133\ .$$

Der Anteil der Personen mit Blutgruppe B liegt zwischen 5,3 % und 13,3 %.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) berechnet $P(X_1 \le 1)$.	4 (I)
2	(2) berechnet $P(5 \le X_2)$.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von n.	4 (II)
2	berechnet die Anzahl der Spender.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeichnet ein Baumdiagramm.	4 (I)
2	bestimmt die totale Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$.	4 (II)
3	bestimmt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von p.	5 (II)
2	berechnet den Anteil der begehrten Päckchen.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen geeigneten Lösungsansatz.	4 (III)
2	bestimmt die Lösungen der quadratischen (Un-)Gleichung.	6 (II)
3	gibt das Intervall für *p* an.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $P(X_1 \leq 1)$.	4 (I)			
2	(2) berechnet $P(5 \leq X_2)$.	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen geeigneten …	4 (II)			
2	berechnet die Anzahl …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeichnet ein Baumdiagramm.	4 (I)			
2	bestimmt die totale …	4 (II)			
3	bestimmt die bedingte …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

---

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt einen geeigneten …	5 (II)			
2	berechnet den Anteil …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt einen geeigneten …	4 (III)			
2	bestimmt die Lösungen …	6 (II)			
3	gibt das Intervall …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0