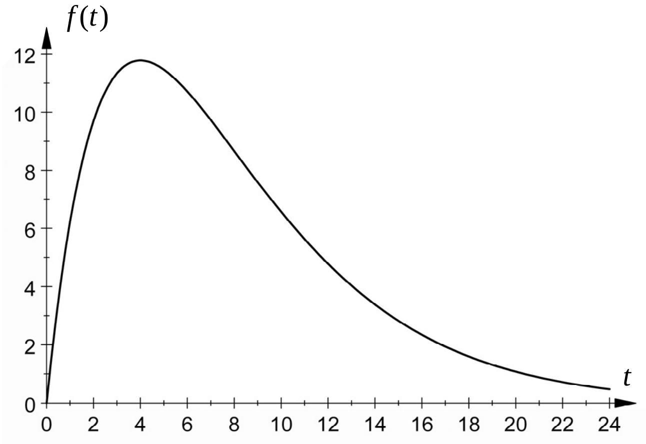
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Pharmaunternehmen produziert ein Medikament, das in Tablettenform verabreicht wird. Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut eines Patienten kann in den ersten 24 Stunden nach Einnahme einer Tablette näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}$, $t \in [0;24]$, beschrieben werden. Dabei wird die Zeit t in Stunden seit der Einnahme $(t = 0)$ und die Wirkstoffkonzentration $f(t)$ im Blut in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen.



a) *Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.*
Berechnen Sie die Höhe der Wirkstoffkonzentration im Blut des Patienten 24 Stunden nach Einnahme des Medikaments. (7 Punkte)

b) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die maximale Wirkstoffkonzentration im Blut erreicht wird, und geben Sie den maximalen Wert an.* (12 Punkte)

Name: ____________________

c) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f an der Stelle $t = 8$ den einzigen Wendepunkt besitzt.*
Begründen Sie, dass die Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 8$ am stärksten abnimmt. (11 Punkte)

d) *Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(t) = -32 \cdot (t+4) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ eine Stammfunktion von f ist.*
Durch $m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)dt$ wird die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall $[a; b]$ bestimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments. (11 Punkte)

e) Für $t > 24$ soll der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration durch die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(24 \mid f(24))$ beschrieben werden.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Tangente.
Berechnen Sie für diese Modellierung den Zeitpunkt, zu dem der Wirkstoff im Blut vollständig abgebaut ist. (9 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

---

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffkonzentration 0 mg/l. Die Wirkstoffkonzentration nimmt in den ersten vier Stunden nach Einnahme des Medikaments zu, bis sie nach ca. vier Stunden einen maximalen Wert von annähernd 12 mg/l erreicht. Nach vier Stunden nimmt die Wirkstoffkonzentration bis zum Zeitpunkt $t = 24$ ab. Die Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 24$ beträgt $f(24) = 8 \cdot 24 \cdot e^{-0,25 \cdot 24} \approx 0,48$ [mg/l].

Modelllösung b)

$f'(t) = 8 \cdot (e^{-0,25 \cdot t} - 0,25 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}) = (8 - 2t) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ (Produkt-, Kettenregel)

Bestimmung des absoluten Maximums

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,25 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 4$, da $e^{-0,25 \cdot t} > 0$

$f'(t) > 0$ für $0 \le t < 4$ und $f'(t) < 0$ für $4 < t \le 24$; d. h., VZW (+/–) von f' an der Stelle $t = 4$

$f(4) = 32 \cdot e^{-1} \approx 11,77$ ist relatives Maximum der Funktion *f*.

Da für die Intervallgrenzen $f(0) = 0 < f(4)$ und $f(24) \approx 0,48 < f(4)$ gilt, ist $f(4)$ absolutes Maximum der Funktion *f*. Die Wirkstoffkonzentration erreicht zum Zeitpunkt $t = 4$ den maximalen Wert von ungefähr 11,77 mg/l.

Modelllösung c)

$f''(t) = (-4 + 0,5 \cdot t) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ (Produkt-, Kettenregel)

$f''(t) = 0 \Leftrightarrow -4 + 0,5 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 8$

$f''(t) < 0$ für $0 \le t < 8$ und $f''(t) > 0$ für $8 < t \le 24$; d. h., VZW (–/+) von f'' an der Stelle $t = 8$ (oder $f'''(8) = (1,5 - 0,125 \cdot 8) \cdot e^{-0,25 \cdot 8} = 0,5 \cdot e^{-2} > 0$)

Die Funktion *f* besitzt an der Stelle $t = 8$ einen Wendepunkt.

Die Änderungsrate f' der Wirkstoffkonzentration besitzt an der Wendestelle $t = 8$ das relative Minimum $f'(8) = -8 \cdot e^{-2} < 0$, d. h., die Wirkstoffkonzentration nimmt ab. Unter Berücksichtigung von $f'(0) > f'(8)$ und $f'(24) > f'(8)$ folgt, dass die Wirkstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t = 8$ am stärksten abnimmt.

Modelllösung d)

Durch Ableiten der Funktion F mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel erhält man:

$$F'(t) = -32 \cdot (e^{-0,25 \cdot t} - 0,25 \cdot (t+4) \cdot e^{-0,25 \cdot t}) = -32 \cdot (1 - 0,25 \cdot t + 1) \cdot e^{-0,25 \cdot t} = 8 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t} = f(t).$$

Die mittlere Wirkstoffkonzentration in den ersten 12 Stunden beträgt

$$m = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(t)dt = \frac{1}{12} \cdot \left[F(t)\right]_0^{12} = \frac{1}{12} \cdot (F(12) - F(0))$$

$$= \frac{1}{12} \cdot (-512 \cdot e^{-3} + 128) \approx \frac{1}{12} \cdot 102,51 \approx 8,54 \text{ (mg/l)} .$$

Modelllösung e)

Die Steigung der Tangente g an den Graphen von f im Punkt $(24 \mid f(24))$ ist

$g'(24) = f'(24) = -40 \cdot e^{-6} (\approx -0,10)$, ihre Gleichung:

$$g(t) = f'(24) \cdot (t - 24) + f(24) = -40 \cdot e^{-6} \cdot (t - 24) + 192 \cdot e^{-6}$$

$$= -40 \cdot e^{-6} \cdot t + 1152 \cdot e^{-6} (\approx -0,10 \cdot t + 2,86).$$

Berechnung der Nullstelle: $g(t) = 0 \Leftrightarrow t = 28,8$ (bzw. $t \approx 28,6$).

Nach 28h 48min (28h 36min) ist der Wirkstoff bei dieser Modellierung vollständig abgebaut.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	beschreibt den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.	4 (I)
2	berechnet die Höhe der Wirkstoffkonzentration nach 24 Stunden.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt die 1. Ableitung f'.	3 (II)
2	ermittelt die Stelle des relativen Maximums der Funktion *f*.	4 (II)
3	begründet, dass $f(4)$ absolutes Maximum ist.	3 (II)
4	gibt die maximale Wirkstoffkonzentration an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt die 2. Ableitung f''.	3 (II)
2	zeigt, dass *f* an der Stelle $t = 8$ einen Wendepunkt besitzt.	4 (II)
3	begründet, dass die Wirkstoffkonzentration an der Stelle $t = 8$ am stärksten abnimmt.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	weist nach, dass F eine Stammfunktion von f ist.	4 (II)
2	ermittelt den Ansatz $m = \frac{1}{12} \cdot (F(12) - F(0))$ zur Berechnung der mittleren Wirkstoffkonzentration.	4 (III)
3	berechnet den Wert der mittleren Wirkstoffkonzentration.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Steigung der Tangente im Punkt $(24 \mid f(24))$.	2 (I)
2	bestimmt eine Gleichung der Tangente.	4 (II)
3	berechnet den Zeitpunkt, zu dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	beschreibt den Verlauf …	4 (I)			
2	berechnet die Höhe …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**7**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die 1. …	3 (II)			
2	ermittelt die Stelle …	4 (II)			
3	begründet, dass $f(4)$ …	3 (II)			
4	gibt die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die 2. …	3 (II)			
2	zeigt, dass f …	4 (II)			
3	begründet, dass die …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist nach, dass …	4 (II)			
2	ermittelt den Ansatz …	4 (III)			
3	berechnet den Wert …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Steigung …	2 (I)			
2	bestimmt eine Gleichung …	4 (II)			
3	berechnet den Zeitpunkt …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**9**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

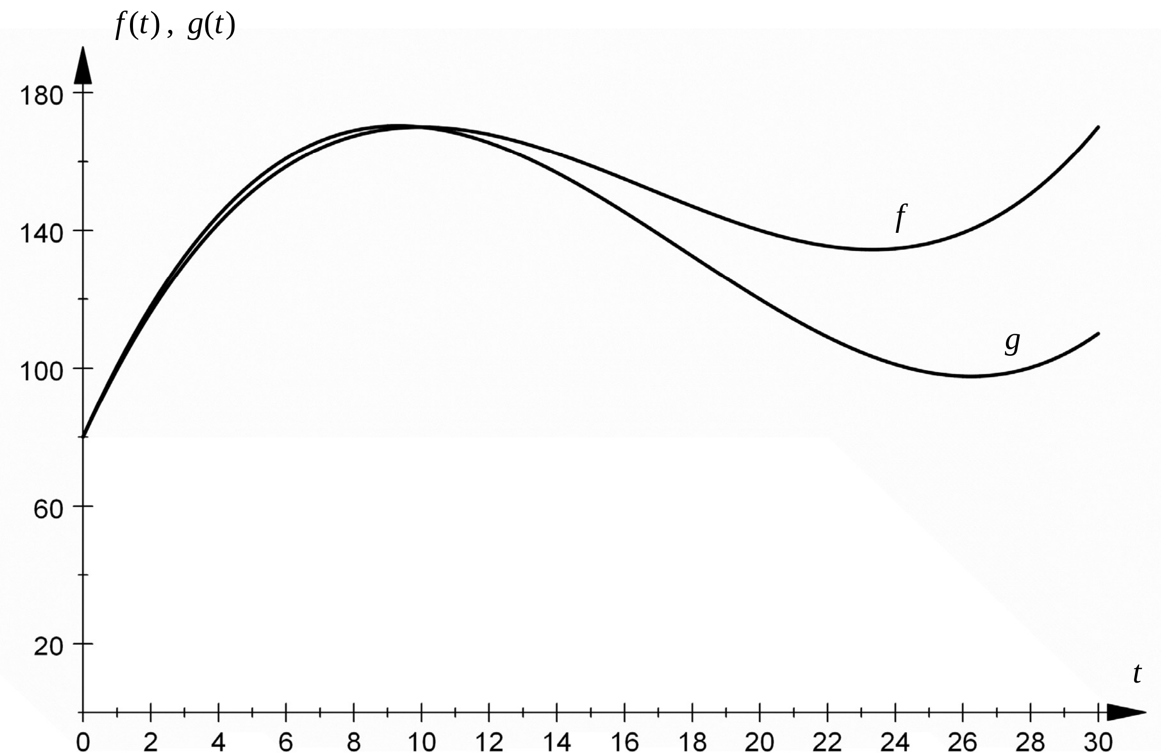
Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Radsportler setzt zur Belastungskontrolle während des Trainings ein Pulsmessgerät ein, das die momentane Herzfrequenz des Sportlers aufzeichnet. Die aus den ermittelten Werten erstellte Herzfrequenzkurve eines 30-minütigen Trainingsabschnitts kann annähernd durch den Graphen der Funktion f (siehe Abbildung) mit

$$f(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 1{,}5 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 80,\ \ 0 \le t \le 30,$$

dargestellt werden. Dabei wird die Zeit t in Minuten (min) seit dem Start $(t = 0)$ und die Herzfrequenz $f(t)$ in Schlägen pro Minute (S/min) angegeben. (Zur Information: Für die Maßzahl der maximalen Herzfrequenz eines Mannes gilt ungefähr: 220 – Lebensalter.)



Name: ____________________

a) *Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Funktion f im Sachzusammenhang.*
Begründen Sie, dass die Funktion f für einen längeren, über $t = 32$ hinausgehenden Trainingsabschnitt keine sinnvolle Beschreibung der Herzfrequenzwerte liefern kann.
(10 Punkte)

b) Der Trainer hatte dem Sportler vorgegeben, nach einer Einstiegsphase von 5 Minuten seine Herzfrequenz $f(t)$ während des restlichen Trainingsabschnitts zwischen 130 S/min und 180 S/min zu halten.

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Vorgabe des Trainers eingehalten wurde.
(10 Punkte)

c) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt des Trainingsabschnitts, zu dem die Herzfrequenz des Sportlers am stärksten abnahm.* (7 Punkte)

d) *Ermitteln Sie die Anzahl aller Herzschläge in den ersten k Minuten des Trainingsabschnitts in Abhängigkeit von k.*
Berechnen Sie die Anzahl aller Herzschläge des Sportlers während des gesamten Trainingsabschnitts. (11 Punkte)

e) Die Herzfrequenzkurve eines Trainingspartners kann während desselben Trainingsabschnitts durch den Graphen der Funktion g (siehe Abbildung auf Seite 1) mit $g(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 1{,}6 \cdot t^2 + 22 \cdot t + 80,\ 0 \le t \le 30,$ angenähert werden.

Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitintervalle des Trainingsabschnitts, in denen die Herzfrequenzwerte $f(t)$ des Radsportlers größer bzw. kleiner als die Herzfrequenzwerte $g(t)$ seines Trainingspartners waren.
Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem der Unterschied zwischen den Herzfrequenzwerten der beiden Sportler am größten war. (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

---

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Zu Beginn des Trainingsabschnitts hat der Sportler eine Herzfrequenz von 80 Schlägen pro Minute. Nach 10 Minuten erreicht die Herzfrequenz ein Maximum von ca. 170 S/min und sinkt in den folgenden Minuten auf ein Minimum von ca. 140 S/min. Nach ca. 24 Minuten steigt die Herzfrequenz wieder an und erreicht nach 30 Minuten den Wert von 170 S/min.
Die maximale Herzschlagfrequenz eines erwachsenen Mannes liegt nach der angegebenen Formel deutlich unter 220 S/min. Für $t = 32$ liefert die Funktion f eine Herzfrequenz von ungefähr 199 S/min und liegt damit in der Nähe der maximalen Herzfrequenz eines 21-jährigen Mannes. Rechts der beiden Extremstellen steigt der Graph der ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 streng monoton, das würde einem ständig weiteren Anstieg der Herzfrequenz entsprechen und beschreibt damit die Herzfrequenz nicht sinnvoll.
(Alternativ: Begründung der Monotonie über die Positivität der 1. Ableitung für $t > 32$)

Modelllösung b)

Bestimmung der Extrema der Funktion f:

$$f'(t) = 0{,}09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 23\frac{1}{3}$$

$$f''(t) = 0{,}18 \cdot t - 3 \Rightarrow f''(10) = -1{,}2 < 0 \wedge f''(23\frac{1}{3}) = 1{,}2 > 0$$

(Alternativ: Vorzeichenwechsel der Funktion f' an den Stellen $t = 10$ und $t = 23\frac{1}{3}$)

Die Funktion f besitzt das relative Maximum $f(10) = 170$ und das relative Minimum

$$f(23\frac{1}{3}) = 134\frac{4}{9} \approx 134{,}4\,.$$

Beide Werte liegen innerhalb des vorgegebenen Herzfrequenzwertintervalls]140 ; 180[.
Da auch die Randwerte $f(5) = 151{,}25$ und $f(30) = 170$ des restlichen Trainingsabschnitts innerhalb dieses Bereichs liegen, wurde die Vorgabe des Trainers eingehalten.

Modelllösung c)

Gesucht ist die Stelle *t*, an der die Änderungsrate f' mit $f'(t) = 0,09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21$ ein negatives Minimum besitzt.

Bestimmung der Koordinaten des absoluten Tiefpunkts des Graphen der Funktion f', d. h. des Scheitelpunkts der nach oben geöffneten Parabel:

$$f'(t) = 0,09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21 = 0,09 \cdot (t^2 - \frac{100}{3} + \frac{700}{3}) = 0,09 \cdot (t - \frac{50}{3})^2 - 4$$

Scheitelpunkt $S\left(16\frac{2}{3} \middle| -4\right)$

(Alternativ: Bestimmung des Wendepunkts von *f* und Untersuchung der Randwerte)

Die Änderungsrate f' besitzt an der Stelle $t = 16\frac{2}{3} \approx 16,7$ ein absolutes Minimum. Außerdem gilt $f'(16\frac{2}{3}) = -4 < 0$; d. h., die Änderungsrate ist negativ. Die Herzfrequenz nimmt ca. 16,7 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab.

Modelllösung d)

Die Anzahl aller Herzschläge im Intervall [0;k] wird bestimmt durch

$$\begin{aligned}\int_0^k f(t)dt &= \int_0^k \left(0,03 \cdot t^3 - 1,5 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 80\right) dt \\ &= \left[0,0075 \cdot t^4 - 0,5 \cdot t^3 + 10,5 \cdot t^2 + 80 \cdot t\right]_0^k \\ &= 0,0075 \cdot k^4 - 0,5 \cdot k^3 + 10,5 \cdot k^2 + 80 \cdot k.\end{aligned}$$

Die Anzahl der Herzschläge im gesamten Trainingsabschnitt [0;30] beträgt:

$$0,0075 \cdot 30^4 - 0,5 \cdot 30^3 + 10,5 \cdot 30^2 + 80 \cdot 30 = 4425.$$

Modelllösung e)

Für die Differenz der Funktionswerte gilt:

$$d(t) = g(t) - f(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 1{,}6 \cdot t^2 + 22 \cdot t + 80 - (0{,}03 \cdot t^3 - 1{,}5 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 80)$$

$$= -0{,}1 \cdot t^2 + t = -0{,}1 \cdot t \cdot (t - 10) \begin{cases} = 0 & \text{für } t = 0 \vee t = 10 \\ > 0 & \text{für alle } 0 < t < 10 \\ < 0 & \text{für alle } 10 < t \leq 30 \end{cases}.$$

Für alle $t \in \left]0;10\right[$ gilt $d(t) = g(t) - f(t) > 0$ bzw. $f(t) < g(t)$, d. h., im Zeitintervall $\left]0;10\right[$ ist die Herzfrequenz des Radsportlers niedriger als die des Trainingspartners. Entsprechend erhält man: $d(t) = g(t) - f(t) < 0 \; bzw. \; f(t) > g(t)$ für alle $t \in \left]10;30\right]$, d. h., die Herzfrequenz des Radsportlers ist im Zeitintervall $\left]10;30\right]$ höher als die seines Trainingspartners.

Zur Ermittlung des größten Unterschieds der Herzfrequenzwerte während des Trainingsabschnitts muss sowohl das absolute Maximum als auch das absolute Minimum der Differenzfunktion *d* mit $d(t) = g(t) - f(t)$ im Intervall [0;30] bestimmt werden.

Die Differenzfunktion *d* mit $d(t) = g(t) - f(t) = -0{,}1 \cdot t^2 + t = -0{,}1 \cdot (t-5)^2 + 2{,}5$ erreicht das absolute Maximum $d(5) = 2{,}5$ im Scheitelpunkt $S(5 \mid 2{,}5)$ der nach unten geöffneten Parabel von *d*.

(Alternativ: $d'(t) = -0{,}2 \cdot t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 5$; $d''(5) = -0{,}2 < 0$)

Ein Minimum kann die Funktion *d* nur am Rand des Intervalls [0;30] annehmen. Aus $d(0) = 0$ und $d(30) = -60$ folgt, dass das absolute Minimum der Differenzfunktion *d* an der Stelle $t = 30$ erreicht wird.

Der größte Unterschied der Herzfrequenzwerte wird somit zum Ende des Trainingsabschnitts $(t = 30)$ erreicht (und beträgt 60 Schläge pro Minute).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	beschreibt den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.	4 (I)
2	berechnet den Funktionswert $f(32)$.	2 (I)
3	begründet, dass die Funktion f für $t > 32$ keine sinnvolle Beschreibung der Herzfrequenz liefert.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die relativen Extrema der Funktion f.	6 (II)
2	berechnet die Randwerte $f(5) = 151{,}25$ und $f(30) = 170$.	2 (I)
3	begründet, dass die Vorgabe des Trainers eingehalten wurde.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt mit einem geeigneten Verfahren die Koordinaten des absoluten Tiefpunkts des Graphen der 1. Ableitung f'.	4 (II)
2	stellt den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Herzfrequenz und der Änderungsrate f' dar und begründet, dass die Herzfrequenz zum Zeitpunkt $t \approx 16{,}7$ am stärksten abnahm.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Ansatz $\int_0^k f(t)dt$ zur Berechnung der Anzahl aller Herzschläge.	3 (II)
2	bestimmt das Integral $\int_0^k f(t)dt$.	4 (II)
3	berechnet die Anzahl aller Herzschläge im gesamten Trainingsabschnitt.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	weist nach, dass die Ungleichungen $f(t) < g(t)$ für alle $0 < t < 10$ bzw. $f(t) > g(t)$ für alle $10 < t \leq 30$ erfüllt sind.	4 (II)
2	gibt die Intervalle an, in denen die Herzfrequenzwerte des Radsportlers kleiner bzw. größer als die seines Trainingspartners sind .	2 (I)
3	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des größten Unterschieds und bestimmt das absolute Maximum und das absolute Minimum der Differenz der Funktionswerte.	4 (III)
4	gibt den Zeitpunkt an, zu dem der Unterschied der Herzfrequenzen der beiden Sportler am größten war.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	beschreibt den Verlauf …	4 (I)			
2	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
3	begründet, dass die …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die relativen …	6 (II)			
2	berechnet die Randwerte …	2 (I)			
3	begründet, dass die …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt mit einem …	4 (II)			
2	stellt den Zusammenhang …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Ansatz …	3 (II)			
2	bestimmt das Integral …	4 (II)			
3	berechnet die Anzahl …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist nach, dass …	4 (II)			
2	gibt die Intervalle …	2 (I)			
3	ermittelt einen Ansatz …	4 (III)			
4	gibt den Zeitpunkt …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

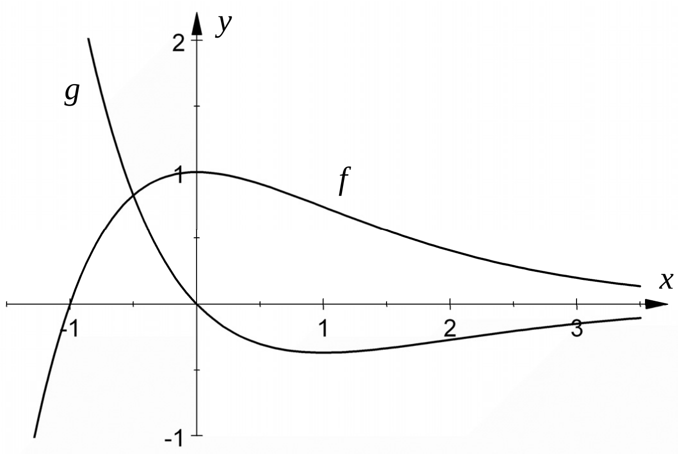
Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}, \; x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Abbildung

a) *Geben Sie die Teilbereiche von $\mathbb{R}$ an, in denen die Funktion f monoton wächst bzw. fällt und untersuchen Sie den Graphen von f auf Extrempunkte.*
Begründen Sie anhand dieser Ergebnisse, dass es sich bei der ebenfalls in der Abbildung dargestellten Funktion g um die Ableitungsfunktion f' von f handeln kann.
[Zur Kontrolle: $f'(x) = -x \cdot e^{-x}$] (14 Punkte)

b) *Zeigen Sie, dass die Graphen von f und f' genau einen Schnittpunkt S haben und geben Sie seine Koordinaten an.*
Prüfen Sie rechnerisch, ob sich die beiden Funktionsgraphen im Punkt S rechtwinklig schneiden. (12 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Parallele zur y-Achse mit $x = u,\ u \geq 0,$ schneidet den Graphen von f im Punkt $P_u(u \mid f(u))$ und den Graphen von f' im Punkt $Q_u(u \mid f'(u))$.

Bestimmen Sie u so, dass die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{P_uQ_u}$ maximal wird, und geben Sie diese maximale Länge an. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: $d(u) = (2 \cdot u + 1) \cdot e^{-u}$]

d) Der Graph der Funktion f' schließt mit der x-Achse und der Parallelen zur y-Achse mit $x = u,\ u > 0,$ ein Flächenstück ein.

Ermitteln Sie den Inhalt $A(u)$ dieser Fläche allgemein in Abhängigkeit von u und berechnen Sie $A(2)$.

Untersuchen Sie für $u \to \infty$ den Inhalt des nach rechts unbegrenzten Flächenstücks. (12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$f'(x) = -x \cdot e^{-x}$ (Produkt-, Kettenregel).

f ist monoton wachsend in $]-\infty; 0[$, denn $f'(x) = -x \cdot e^{-x} > 0$ für $x < 0$ (da $e^{-x} > 0$).

f ist monoton fallend in $]0; +\infty[$, denn $f'(x) = -x \cdot e^{-x} < 0$ für x > 0.

Bestimmung der Extrempunkte:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; Vorzeichenwechsel (+/–) der 1. Ableitung an der Stelle $x = 0$ (s. oben),

oder: mit $f''(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$ folgt $f''(0) = -1 < 0$. Der Graph von f besitzt den relativen Hochpunkt H(0 | 1).

Der Graph von g entspricht dem Graphen der Ableitungsfunktion f', denn:

- er verläuft für x < 0 oberhalb der x-Achse (f ist monoton wachsend in $]-\infty; 0[$),
- die Extremstelle x = 0 der Funktion f ist Nullstelle des Graphen von g,
- der Graph von g verläuft für x > 0 unterhalb der x-Achse (f ist monoton fallend in $]0; +\infty[$).

Modelllösung b)

Bestimmung des Schnittpunkts der Graphen von f und f':

$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow (x+1) \cdot e^{-x} = -x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow x = -0{,}5$ (da $e^{-x} \neq 0$); $x = -0{,}5$ ist einzige Schnittstelle; Koordinaten des Schnittpunkts $S(-0{,}5 \mid 0{,}5 \cdot e^{0{,}5})$.

$f''(x) = (x-1) \cdot e^{-x}$; Steigung der Tangenten an den Graphen von f bzw. f' im Punkt S:

$m_1 = f'(-0{,}5) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}5}$ und $m_2 = f''(-0{,}5) = -1{,}5 \cdot e^{0{,}5}$.

Die Graphen schneiden sich nicht rechtwinklig, denn

$m_1 \cdot m_2 = 0{,}5 \cdot e^{0{,}5} \cdot (-1{,}5 \cdot e^{0{,}5}) = -0{,}75 \cdot e \neq -1$.

Modelllösung c)

Die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von u beträgt

$d(u) = \left|f(u) - f'(u)\right| = \left|(u+1)\cdot e^{-u} - (-u\cdot e^{-u})\right| = (2\cdot u+1)\cdot e^{-u}$ (da $u \geq 0$).

Bestimmung des Maximums der Längenfunktion d:

$d'(u) = (1-2\cdot u)\cdot e^{-u} = 0 \Leftrightarrow u = 0{,}5$

VZW (+/–) von d' an der Stelle u = 0,5 (oder $d''(0{,}5) = -2\cdot e^{-0{,}5} < 0$)

relatives Maximum $d(0{,}5) = 2\cdot e^{-0{,}5}$

Aus $d(0) = 1 < d(0{,}5)$ und $\lim\limits_{u\to\infty} d(u) = \lim\limits_{u\to\infty}(2u+1)\cdot e^{-u} = 0$ folgt, dass an der Stelle u = 0,5 ein absolutes Maximum vorliegt.

Für $u = 0{,}5$ hat die Strecke $\overline{P_uQ_u}$ die maximale Länge $d(0{,}5) = 2\cdot e^{-0{,}5} \approx 1{,}21$ (LE).

Modelllösung d)

Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts:

$A(u) = \left|\int_0^u f'(x)dx\right| = \left|[f(x)]_0^u\right|$, da die Funktion f eine Stammfunktion der Funktion f' ist.

Der Inhalt des eingeschlossenen Flächenstücks in Abhängigkeit von u beträgt:

$A(u) = \left|[(x+1)\cdot e^{-x}]_0^u\right| = \left|(u+1)\cdot e^{-u} - e^0\right| = \left|(u+1)\cdot e^{-u} - 1\right|$.

Für $u = 2$ erhält man $A(2) = \left|3\cdot e^{-2} - 1\right| \approx \left|-0{,}59\right| = 0{,}59$.

Der Flächeninhalt beträgt ca. 0,59 FE.

Es ist z. B. A(10) ≈ 0,9995 ≈ 1, A(100) ≈ 1. Die Flächenmaßzahl nähert sich mit wachsendem u dem Wert 1.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	berechnet die Ableitungsfunktion f'.	3 (I)
2	gibt die Bereiche an, in denen *f* monoton fällt bzw. steigt.	4 (I)
3	ermittelt den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$.	4 (II)
4	begründet, dass es sich bei der Funktion *g* um f' handeln kann.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	zeigt, dass die Graphen der Funktionen *f* und f' genau einen Schnittpunkt haben.	3 (II)
2	gibt die Koordinaten des Schnittpunkts an.	2 (I)
3	ermittelt die Steigung der Tangenten im Punkt *S*.	4 (II)
4	prüft, ob die Graphen sich rechtwinklig schneiden.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{PQ}$ in Abhängigkeit von *u*.	4 (III)
2	bestimmt das Maximum der Längenfunktion *d*.	4 (II)
3	weist nach, dass ein absolutes Maximum vorliegt.	2 (II)
4	gibt die maximale Länge $d(0,5)$ an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des Flächeninhalts $A(u)$.	4 (III)
2	bestimmt den Flächeninhalt $A(u)$ in Abhängigkeit von u.	3 (II)
3	berechnet den Flächeninhalt $A(2)$.	3 (I)
4	ermittelt und interpretiert für größer werdende u die Flächenmaßzahl $A(u)$.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Ableitungsfunktion …	3 (I)			
2	gibt die Bereiche …	4 (I)			
3	ermittelt den Hochpunkt …	4 (II)			
4	begründet, dass es …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass die …	3 (II)			
2	gibt die Koordinaten …	2 (I)			
3	ermittelt die Steigung …	4 (II)			
4	prüft, ob die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Länge …	4 (III)			
2	bestimmt das Maximum …	4 (II)			
3	weist nach, dass …	2 (II)			
4	gibt die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	4 (III)			
2	bestimmt den Flächeninhalt …	3 (II)			
3	berechnet den Flächeninhalt …	3 (I)			
4	ermittelt und interpretiert …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Eine Abbildung α bildet die Eckpunkte $A(-1|-1)$, $B(1|-1)$, $C(1|1)$ und $D(-1|1)$ des Quadrates Q auf die Eckpunkte A', B', C' und D' des Quadrates Q_1 so ab, dass diese jeweils auf den Seitenmitten von Q liegen (siehe *Bild 1*).

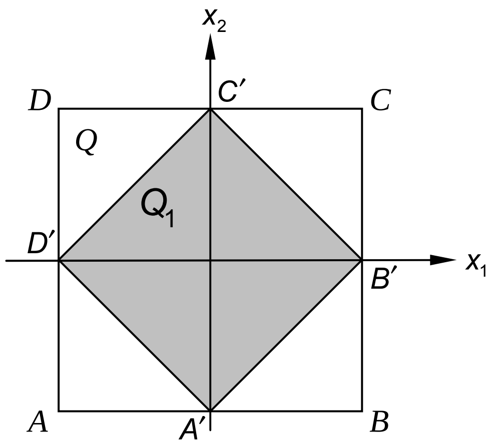


Bild 1

a) *Geben Sie die Eckpunkte A', B', C' und D' des Quadrates Q_1 an und bestimmen Sie die Matrix M der Abbildung $\alpha: \vec{x}' = M \cdot \vec{x}$.* (9 Punkte)

b) Durch die Anwendung der Abbildung $\alpha: \vec{x}' = M \cdot \vec{x}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ auf das Quadrat Q_1 entstehe das Quadrat Q_2.

Berechnen Sie die Eckpunkte A'', B'', C'' und D'' von Q_2.
Zeichnen Sie das Quadrat Q_2 in das Bild 1 ein und beschreiben Sie die geometrische Wirkung der Abbildung α möglichst genau. (11 Punkte)

Name: ____________________

c) *Weisen Sie nach, dass die Abbildung* α *eine Verkettung der Abbildungen* $\beta: \vec{x}' = K \cdot \vec{x}$ *und* $\gamma: \vec{x}' = L \cdot \vec{x}$ *mit* $K = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ *und* $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ist.* (7 Punkte)

d) Nun wird die bisher betrachtete Abbildung $\alpha: \vec{x}' = M \cdot \vec{x}$ abgeändert zu der Abbildung $\alpha_1: \vec{x}' = M \cdot \vec{x} + \vec{v}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ und M aus Teilaufgabe b).

Das Viereck R entsteht als Bild des Quadrates Q (s. o.) unter der Abbildung α_1.

Berechnen Sie die Eckpunkte von R. Zeigen Sie, dass R ein Quadrat ist. (12 Punkte)

e) Ein Fixpunkt F einer Abbildung φ ist ein Punkt, der sich unter Anwendung der Abbildung φ nicht verändert. Für seinen Ortsvektor $\vec{x}_F$ gilt demnach: $\varphi(\vec{x}_F) = \vec{x}_F$.

Ermitteln Sie den Fixpunkt F der Abbildung α_1 *aus Teilaufgabe d).* (11 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Eckpunkte werden abgelesen: $A'(0\,|-1)$, $B'(1\,|\,0)$, $C'(0\,|\,1)$ und $D'(-1\,|\,0)$.

Aus $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und z. B. $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, insgesamt also das

Gleichungssystem $\left| \begin{array}{lll} a+b & & = 0 \\ & c+d & = 1 \\ a-b & & = 1 \\ & c-d & = 0 \end{array} \right|$. Es folgt $a = c = d = 0{,}5$ und $b = -0{,}5$. Somit ist

$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

[Die Einträge der Abbildungsmatrix M können auch über die Bilder der Einheitsvektoren (Ortsvektoren zweier Seitenmitten des Ausgangsquadrates Q) bestimmt werden:

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ und $M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.]

Modelllösung b)

Berechnung der Eckpunkte A'', B'', C'' und D'':

$\vec{x}_{A''} = \alpha(\vec{x}_{A'}) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$,

analog: $\vec{x}_{B''} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{C''} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{D''} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die Eckpunkte sind $A''(0{,}5\,|-0{,}5)$, $B''(0{,}5\,|\,0{,}5)$, $C''(-0{,}5\,|\,0{,}5)$ und $D''(-0{,}5\,|-0{,}5)$.

Bei falscher Bestimmung der Eckpunkte von Q_1 in Teilaufgabe a) wird die konsequente Rechnung und Zeichnung mit diesen als richtig bewertet.

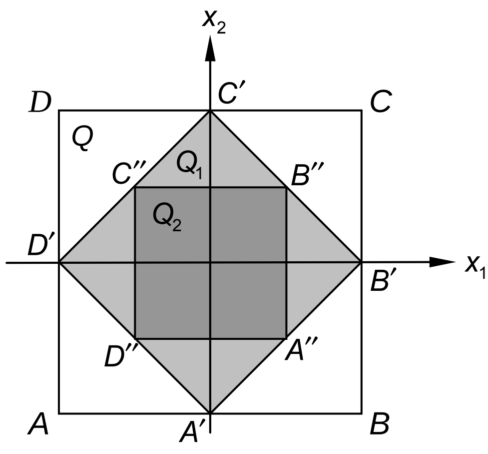


Bild 1

Die Abbildung α bewirkt eine Drehung um 45° (aus *Bild 1* ablesbar) und Stauchung mit dem Faktor *k*. Der Faktor k kann z. B. aus dem Vergleich der Längen eines Bild- und eines Urbildvektors ermittelt werden: $k = \left|M \cdot \vec{e}_1\right| = \left|\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(Alternativ statt Stauchung: Halbierung des Flächeninhalts.)

Modelllösung c)

α ist eine Verkettung von β und γ, denn: $K \cdot L = \begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix} = M$. Somit: $\alpha = \beta \circ \gamma$.

Da die Verknüpfung kommutativ ist, ist der Nachweis über $L \cdot K = \begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix} = M$ sowie die Nacheinanderanwendung der Abbildungen auf einen beliebigen Vektor $\vec{x}$ ebenfalls möglich.

Modelllösung d)

Berechnung der Eckpunkte R_1 bis R_4 des Vierecks R :

$\vec{x}_{R_1} = \alpha_1(\vec{x}_A) = \begin{pmatrix}0{,}5 & -0{,}5\\0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$, analog:

$\vec{x}_{R_2} = \alpha_1(\vec{x}_B) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$; $\vec{x}_{R_3} = \alpha_1(\vec{x}_C) = \begin{pmatrix}1{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$; $\vec{x}_{R_4} = \alpha_1(\vec{x}_D) = \begin{pmatrix}0{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$.

Die Eckpunkte sind $R_1(1{,}5\,|\,0{,}5)$, $R_2(2{,}5\,|\,1{,}5)$, $R_3(1{,}5\,|\,2{,}5)$ und $R_4(0{,}5\,|\,1{,}5)$.

Nachweis, dass das Viereck *R* ein Quadrat ist, z. B.:

Wegen $\overrightarrow{R_1R_2} = \overrightarrow{R_4R_3} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{R_2R_3} = \overrightarrow{R_1R_4} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sind alle Seiten des Vierecks gleich lang; es ist eine Raute. Wegen $\overrightarrow{R_1R_2} \cdot \overrightarrow{R_2R_3} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0$ schließen die Seiten $\overline{R_1R_2}$ und $\overline{R_2R_3}$ einen rechten Winkel ein. Da gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm gleich groß sind und benachbarte Winkel sich zu 180° ergänzen, ist *R* ein Quadrat.

Modelllösung e)

Ansatz zur Fixpunktberechnung gemäß der Definition in der Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(\vec{x}_F) = \vec{x}_F \\ \Leftrightarrow\ & M \cdot \vec{x}_F + \vec{v} = \vec{x}_F \\ \Leftrightarrow\ & (M - E) \cdot \vec{x}_F = -\vec{v} \end{aligned}$$

oder die gleichwertige Entwicklung über ein lineares Gleichungssystem führt auf

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} -0,5 & -0,5 & -1,5 \\ 0,5 & -0,5 & -1,5 \end{array} \right\rangle \to \left\langle \begin{array}{cc|c} -0,5 & -0,5 & -1,5 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right\rangle \to \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right\rangle \to \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right\rangle$$

und somit zum Fixvektor $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und dem Fixpunkt $F(0\,|\,3)$ als einzigem Fixpunkt.

6.2 Teilleistungen - Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	gibt die Eckpunkte an.	3 (I)
2	bestimmt die zur Abbildung α gehörende Matrix *M*.	6 (II)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet die Eckpunkte des Quadrates Q_2 .	4 (I)
2	zeichnet das Quadrat Q_2 in *Bild 1* des Aufgabenblattes ein.	2 (I)
3	beschreibt die geometrische Wirkung der Abbildung als Drehung um 45° und Stauchung.	2 (II)
4	ermittelt den Stauchfaktor k .	3 (II)
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	interpretiert den Zusammenhang zwischen Abbildungsverkettung und Matrizenmultiplikation.	3 (II)
2	berechnet das Matrizenprodukt $K \cdot L$ (bzw. $L \cdot K$).	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Eckpunkte des Vierecks *R*.	6 (I)
2	zeigt, dass das Viereck *R* ein Quadrat ist.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Ansatz zur Fixpunktberechnung aus der Aufgabenstellung.	3 (III)
2	leitet das zugehörige LGS her und löst es.	6 (II)
3	gibt den Fixpunkt an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:___________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Eckpunkte …	3 (I)			
2	bestimmt die zur …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Eckpunkte …	4 (I)			
2	zeichnet das Quadrat …	2 (I)			
3	beschreibt die geometrische …	2 (II)			
4	ermittelt den Stauchfaktor …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	interpretiert den Zusammenhang …	3 (II)			
2	berechnet das Matrizenprodukt …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**7**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Eckpunkte …	6 (I)			
2	zeigt, dass das …	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Ansatz …	3 (III)			
2	leitet das zugehörige …	6 (II)			
3	gibt den Fixpunkt …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

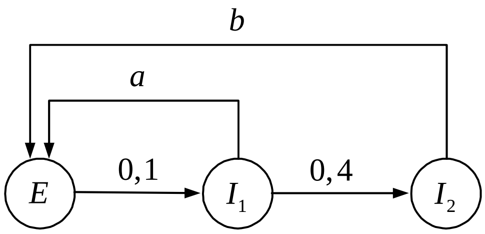
Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Viele Insektenarten vermehren sich nicht nur durch befruchtete Eier sondern auch durch unbefruchtete Eier. Unter Laborbedingungen entwickelt sich die Population einer solchen Insektenart nach einem stark vereinfachten Modell in drei Entwicklungsstufen. Dabei schlüpfen aus Eiern (E) nach einer Woche Insekten der ersten Entwicklungsstufe (I_1), die nach einer Woche unbefruchtete Eier legen und sich in voll ausgebildete Insekten (I_2) verwandeln. Diese legen nach einer weiteren Woche befruchtete Eier und sterben danach. Gezählt werden neben den Eiern jeweils nur die weiblichen Insekten. Die wöchentliche Entwicklung der Population kann durch den abgebildeten Übergangsgraphen beschrieben werden.



a) *Begründen Sie, dass die in dem Übergangsgraphen dargestellte Populationsentwicklung durch die Übergangsmatrix* $\ddot{U}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ *angegeben wird, und erklären Sie die Bedeutung der Parameter a und b.* (8 Punkte)

b) Ein Laborversuch wird mit 1000 Eiern, aber ohne Insekten der Entwicklungsstufen I_1 und I_2 gestartet. Außerdem gelte $a = 10$ und $b = 5$.

Geben Sie die spezielle Übergangsmatrix an und untersuchen Sie die Entwicklung der Population für die folgenden drei Wochen. (10 Punkte)

Name: ____________________

c) Nach vier Wochen besteht die in Teilaufgabe b) beobachtete Population aus 1000 Eiern, 20 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 40 Insekten der Entwicklungsstufe I_2.
Durch einen einmaligen Pestizideinsatz werden 60 % der Eier und 60 % der Insekten jeder der beiden Entwicklungsstufen I_1 und I_2 vernichtet. Zudem geht den Insekten der beobachteten Population dauerhaft die Fähigkeit verloren, auf der Entwicklungsstufe I_1 unbefruchtete Eier zu legen.

Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an. Prüfen Sie, ob die so geschwächte Population auf lange Sicht überlebensfähig ist. (11 Punkte)

d) Im Labor wurden die Insekten anderen klimatischen Bedingungen ausgesetzt. Dadurch veränderte sich der Wert des Parameters *a* so, dass aus einer Population von 2000 Eiern, 1000 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 0 Insekten der Entwicklungsstufe I_2 nach zwei Wochen 3200 Eier, 600 Insekten der Entwicklungsstufe I_1 und 80 Insekten der Entwicklungsstufe I_2 entstanden.

Bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass $b = 5$ immer noch gültig ist, den neuen Wert des Parameters a. (10 Punkte)

e) *Ermitteln Sie die langfristige Entwicklung der Anfangspopulation(z. B. nach 4 Wochen) aus Teilaufgabe b) unter der Voraussetzung, dass die Überlebens- und Vermehrungsverhältnisse dauernd durch die Übergangsmatrix $Ü_{a,b}$ aus Teilaufgabe a) mit $a = 10$ und $b = 5$* gegeben sind. (11 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Bei gegebener Matrix $\ddot{U}_{a,b}$ kann der Bestand durch den Vektor $\begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Aus $\begin{pmatrix} E' \\ I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \ddot{U}_{a,b} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot I_1 + b \cdot I_2 \\ 0{,}1 \cdot E \\ 0{,}4 \cdot I_1 \end{pmatrix}$ ergeben sich damit die folgenden Zusammenhänge.

$E' = a \cdot I_1 + b \cdot I_2$: Gesamtzahl der Eier, die von Insekten der Entwicklungsstufen I_1 und I_2 gelegt werden,

$I_1' = 0{,}1 \cdot E$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_1, die sich aus 10 % der Eier entwickeln,

$I_2' = 0{,}4 \cdot I_1$: Anzahl der Insekten der Entwicklungsstufe I_2, in die sich 40 % der Insekten der Entwicklungsstufe I_1 verwandeln.

Das entspricht dem im Übergangsgraphen dargestellten Sachverhalt.

Die Parameter a bzw. b geben die Erzeugungsraten von Eiern durch Insekten der Entwicklungsstufe I_1 bzw. I_2 an.

Modelllösung b)

Mit $a = 10$ und $b = 5$ ergibt sich die Übergangsmatrix:

$\ddot{U} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$. Der Startvektor lautet $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{x}_k = \ddot{U} \cdot \vec{x}_{k-1}$ $(k = 1, 2, 3)$ erhält man die Verteilungsvektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Modelllösung c)

Aus den Angaben des Aufgabentextes ergibt sich die veränderte Übergangsmatrix

$\ddot{U}_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$. Für den Startvektor gilt nun $\vec{x}_0 = 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Für die zukünftigen Insektenpopulationen ergeben sich die Verteilungen

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 1{,}6 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} = 0{,}2 \cdot \vec{x}_0$. Daran erkennt man, dass die Population nicht überlebensfähig ist.

Zu dieser Aussage kann man auch durch allgemeine Rechnung oder unmittelbar durch Bildung des Produkts aus Erzeugungsrate und Überlebensraten kommen: $5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 < 1$.

Modelllösung d)

Ausgehend von der Übergangsmatrix $\ddot{U}_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 5 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor

$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$\ddot{U}_a^2 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}1a & 2 & 0 \\ 0 & 0{,}1a & 0{,}5 \\ 0{,}04 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3200 \\ 600 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 200a + 2000 = 3200 \\ 100a = 600 \\ 80 = 80 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow a = 6$$

Modelllösung e)

$$\ddot{U}^4_{10;5} = (\ddot{U}^2_{10;5})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0,02 & 1 & 0,5 \\ 0,04 & 0,08 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{U}^4_{10;5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + 4 \cdot I_1 + I_2 \\ 0,02 \cdot E + I_1 + 0,5 \cdot I_2 \\ 0,04 \cdot E + 0,08 \cdot I_1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe der Population $1,06 \cdot E + 5,08 \cdot I_1 + 1,5 \cdot I_2$ übertrifft nach vier Wochen die Größe $E + I_1 + I_2$ der Anfangspopulation wenigstens um einen Faktor $1,06$. Die Population wächst exponentiell und daher langfristig über alle Grenzen.

Alternative Lösungsmöglichkeiten:
Wenn man von einer Startpopulation ausgeht, die nur aus Eiern besteht, so ergibt sich:

$$\ddot{U}^2_{10;5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ \ddot{U}^4_{10;5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0,02 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix},\ \ddot{U}^6_{10;5} \cdot \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \\ 0,04 \cdot E \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Eier hat nach 6 Wochen um 4 % zugenommen, die gesamte Population um 12 %. In der Startverteilung evtl. vorhandene Insekten (I_1 und I_2) legen zusätzliche Eier und erhöhen dadurch die Anzahl der Eier, auch wenn die Anzahl der Insekten (I_1 und I_2) selbst zwischenzeitlich rückläufig sein kann. Die Anzahl der Eier wächst also exponentiell mit einem Wachstumsfaktor von wenigstens $1,04$ bezogen auf 6 Wochen und mit ihr die Anzahl der daraus entstehenden Insekten (I_1 und I_2).

Alternativ kann auch anhand des Terms $0,1 \cdot a + 0,1 \cdot 0,4 \cdot b$, gebildet aus Erzeugungsraten von Eiern und Überlebensraten, argumentiert werden.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	begründet den Aufbau der Übergangsmatrix *Ü*.	6 (II)
2	erklärt die Bedeutung der Parameter *a* und *b*.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt die spezielle Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	gibt den Startvektor an.	2 (I)
3	ermittelt den Ansatz für die Berechnung.	3 (II)
4	berechnet die Populationen der folgenden 3 Wochen.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt die modifizierte Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	nennt den neuen Startvektor.	2 (I)
3	prüft die Fragestellung mit Hilfe der Folgepopulationen.	4 (II)
4	begründet, dass die Population nicht überlebensfähig ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die Übergangsmatrix an.	2 (I)
2	bestimmt eine Matrixgleichung zur Lösung der Problemstellung.	4 (II)
3	berechnet den Parameter a.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (III)
2	bestimmt die Größe einer allgemeinen Population nach z. B. 4 Wochen.	5 (II)
3	begründet, dass die Population exponentiell wächst.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	begründet den Aufbau …	6 (II)			
2	erklärt die Bedeutung …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die spezielle …	2 (I)			
2	gibt den Startvektor …	2 (I)			
3	ermittelt den Ansatz …	3 (II)			
4	berechnet die Populationen …	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die modifizierte …	2 (I)			
2	nennt den neuen …	2 (I)			
3	prüft die Fragestellung …	4 (II)			
4	begründet, dass die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Übergangsmatrix …	2 (I)			
2	bestimmt eine Matrixgleichung …	4 (II)			
3	berechnet den Parameter …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz.	3 (III)			
2	bestimmt die Größe …	5 (II)			
3	begründet, dass die …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Oktaeder ist ein regelmäßiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Jedes Oktaeder kann einem Würfel so einbeschrieben werden, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen des Würfels liegen (siehe *Abbildung 1*).

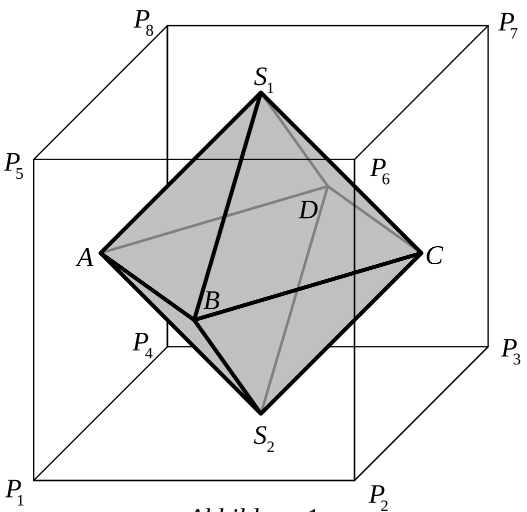


Abbildung 1

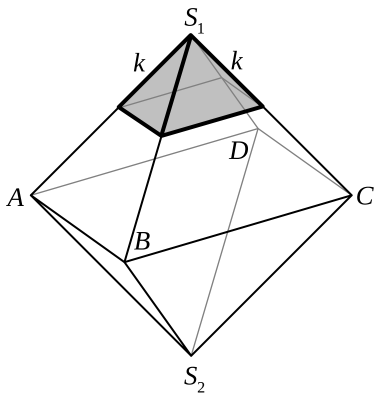


Abbildung 2

Gegeben sind die Punkte $A(13\,|-5\,|\,3)$, $B(11\,|\,3\,|\,1)$, $C(5\,|\,3\,|\,7)$ und $S_1(13\,|\,1\,|\,9)$.

a) *Begründen Sie: Die Punkte* $A(13\,|-5\,|\,3)$, $B(11\,|\,3\,|\,1)$ *und* $C(5\,|\,3\,|\,7)$ *sind die Eckpunkte eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks.*
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A, B, C und D ein Quadrat bilden. (8 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Ebene E enthält das Quadrat *ABCD*.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform.

[Zur Kontrolle: $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 27 = 0$] (7 Punkte)

c) Der Punkt $S_1(13\,|\,1\,|\,9)$, der nicht in der Ebene E liegt, wird an der Ebene E gespiegelt, so dass der zu S_1 symmetrisch liegende Spiegelpunkt S_2 entsteht.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_2.
Begründen Sie: Der Körper mit den Eckpunkten A, B, C, D, S_1 und S_2 *ist ein Oktaeder.*
(11 Punkte)

d) Das Oktaeder $ABCDS_1S_2$ ist gemäß *Abbildung 1* einem Würfel *so* einbeschrieben, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen dieses Würfels liegen.

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 *und* P_8 *des Würfels.* (10 Punkte)

e) Von dem Oktaeder $ABCDS_1S_2$ wird ein pyramidenförmiges Stück so abgeschnitten, dass die Pyramidenspitze der Punkt S_1 ist und die von S_1 ausgehenden Kanten der abgeschnittenen Pyramide die gleiche Länge *k* haben (siehe *Abbildung 2*).

Ermitteln Sie das Volumen der abgeschnittenen Pyramide für den Fall, dass ihre Kantenlänge k ein Drittel der Länge der Oktaederkante $\overline{AS_1}$ *beträgt.*

Nun werden von allen weiteren Ecken des Oktaeders $ABCDS_1S_2$ gleich große Pyramiden mit der Kantenlänge *k* abgeschnitten, so dass ein Restkörper R_k entsteht.

Beschreiben Sie diesen Restkörper R_k *für den Fall* $k = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AS_1}\right|$ *hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen (Anzahl der Ecken, Seitenlängen).*
Beschreiben Sie den Restkörper R_k *für den Fall* $k = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AS_1}\right|$ *hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen.* (14 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. Inhaltliche Schwerpunkte
- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. Medien/Materialien
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+64+4} = \sqrt{72}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$.

Daher hat das Dreieck *ABC* einen rechten Winkel in *B* und zwei gleichlange Katheten.

$\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC}$. Es folgt: $D(7\,|\,-5\,|\,9)$.

Modelllösung b)

Aufstellen der Ebenengleichungen von *E* nach einem bekannten Verfahren:

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $k, l \in \mathbb{R}$ (Parameterform),

$E : 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 - 27 = 0$ (Koordinatenform).

Modelllösung c)

Unter der Vermutung, dass die Oktaedereigenschaft vorliegt, kann die folgende Lösung sinnvoll abgekürzt werden. Bestimmung des Lotfußpunktes *L* von S_1 in *E*:

Gleichung der zugehörenden Lotgeraden: $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Koordinatenform:

$2 \cdot (13 + 2m) + (1 + m) + 2 \cdot (9 + 2m) - 27 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Einsetzen in die Geradengleichung von *l* ergibt:

$L(9\,|\,-1\,|\,5)$.

S_2 ist der bzgl. E zu S_1 spiegelsymmetrisch liegende Punkt, also gilt:

$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{LS_1}$, also $\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der gesuchte Spiegelpunkt ist $S_2(5\,|\,-3\,|\,1)$.

Zum Nachweis der Oktaedereigenschaft des Körpers $ABCDS_1S_2$:

Wegen $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ ist L der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$ und damit der Körper $ABCDS_1$ eine senkrechte Pyramide mit (gemäß Teilaufgabe (a)) quadratischer Grundfläche $ABCD$.

Es gilt weiterhin: $\left|\overrightarrow{AS_1}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{72}$, also $\left|\overrightarrow{AS_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ (vgl. Teilaufgabe a)).

Also hat die senkrechte Pyramide $ABCDS_1$ nur Kanten der Länge $\sqrt{72}$ LE. Mit der spiegelsymmetrischen Lage von S_1 und S_2 bzgl. E folgt die Behauptung.

Modelllösung d)

Lösung mittels geeigneter Vektorketten gemäß *Abbildung* z. B.:

$\overrightarrow{OP_6} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_8} = \overrightarrow{OP_6} + 2 \cdot \overrightarrow{P_6S_1} = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Die Punkte sind $P_6(11\,|\,9\,|\,7)$ und $P_8(15\,|\,-7\,|\,11)$.

Modelllösung e)

Hier kann auf unterschiedliche Weise (elementargeometrisch) argumentiert werden, etwa:
Unter Anwendung des Strahlensatzes kann gefolgert werden, dass die abgeschnittene Pyramide eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge $l = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|$ und der Körperhöhe $h = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{LS_1}\right|$ hat.

$V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h$, $V = \frac{16}{3}$ $[VE]$.

Der Restkörper ist ein abgestumpftes Oktaeder, das man sich als einen „fußballähnlichen“ Körper vorstellen kann.

Für $k = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AS_1}\right|$ besteht die Oberfläche des Restkörpers aus sechs Quadraten [nicht zu berechnen: mit der Seitenlänge $l = k$] und acht gleichseitigen Sechsecken [nicht zu berechnen: mit der gleichen Seitenlänge l] (Anwendung des Strahlensatzes).

Für $k = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AS_1}\right|$ besteht die Oberfläche des Restkörpers aus sechs Quadraten [nicht zu berechnen: mit der Seitenlänge $l = k$] und acht gleichseitigen Dreiecken [nicht zu berechnen: mit der gleichen Seitenlänge l] (Anwendung des Strahlensatzes).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	beschreibt Kriterien für den Nachweis der Rechtwinkligkeit und die Gleichschenkligkeit des Dreiecks *ABC*.	2 (II)
2	stellt den Nachweis der Rechtwinkligkeit und der Gleichschenkligkeit rechnerisch dar.	4 (I)
3	berechnet die Koordinaten des Punktes *D*.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	gibt eine Gleichung der Ebene *E* in Parameterform an.	2 (I)
2	ermittelt eine Gleichung der Ebene *E* in Koordinatenform.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsweg zur Bestimmung eines Spiegelpunktes bzgl. einer Ebene.	4 (II)
2	berechnet die Koordinaten des Spiegelpunktes S_2.	4 (I)
3	begründet die Oktaedereigenschaft.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsweg zur Bestimmung des Punktes P_6.	3 (III)
2	berechnet die Koordinaten des Punktes P_6.	3 (I)
3	ermittelt einen Lösungsweg zur Bestimmung des Punktes P_8.	2 (II)
4	berechnet die Koordinaten des Punktes P_8.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Lösungsansatz für die Bestimmung des Volumens.	4 (III)
2	berechnet das Volumen.	4 (I)
3	beschreibt den Restkörper R_k hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen für $k = \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AS_1}\right\|$.	3 (II)
4	beschreibt den Restkörper R_k hinsichtlich der Anzahl und Eigenschaften seiner Seitenflächen für $k = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AS_1}\right\|$.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	beschreibt Kriterien für …	2 (II)			
2	stellt den Nachweis …	4 (I)			
3	berechnet die Koordinaten …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt eine Gleichung …	2 (I)			
2	ermittelt eine Gleichung …	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsweg …	4 (II)			
2	berechnet die Koordinaten …	4 (I)			
3	begründet die Oktaedereigenschaft.	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsweg …	3 (III)			
2	berechnet die Koordinaten …	3 (I)			
3	ermittelt einen Lösungsweg …	2 (II)			
4	berechnet die Koordinaten …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Lösungsansatz …	4 (III)			
2	berechnet das Volumen.	4 (I)			
3	beschreibt den Restkörper …	3 (II)			
4	beschreibt den Restkörper …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Der deutsche Basketball-Profi Dirk Nowitzki spielt in der amerikanischen Profiliga NBA beim Club Dallas Mavericks. In der Saison 2006/2007 erzielte er bei Freiwürfen eine Trefferquote von 90,4 %.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er*

(1) *genau 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*
(2) *höchstens 8 Treffer bei 10 Versuchen erzielt,*
(3) *höchstens vier Mal nacheinander bei Freiwürfen erfolgreich ist.* *(12 Punkte)*

b) Bei Auswärtsspielen traf er 231 von 263 Freiwürfen. Ein Sportreporter berichtet, dass Dirk Nowitzki auswärts eine deutlich schwächere Freiwurfquote habe.

Untersuchen Sie auf dem Signifikanzniveau von 5 %, ob Nowitzkis Trefferanzahl bei Auswärtsspielen signifikant unter seiner erwarteten Trefferanzahl liegt.

(Hinweis: Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Standardabweichung $\sigma > 3$ gilt näherungsweise $P(X \geq \mu - 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$.) *(10 Punkte)*

c) In der Vorbereitung zur nachfolgenden Saison vermutet der Trainer, dass die Quote seines Schützlings gesunken ist. Bevor er mit dieser Vermutung an die Öffentlichkeit geht, möchte er aber anhand der ersten 50 Freiwürfe in der neuen Saison überprüfen, ob diese Aussage auf einem Signifikanzniveau von 10 % gesichert ist.

Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel. Gehen Sie dabei von der gerundeten (Vorjahres-)-Trefferquote von 90 % aus. *(12 Punkte)*

Name: ____________________

d) Früher gab es beim Basketball in bestimmten Fällen eine sogenannte „1+1-Regel“, die inzwischen aber abgeschafft wurde. Dabei bekam ein Spieler bei einem Foul einen Freiwurf zugesprochen und durfte genau dann noch einen zweiten Freiwurf ausführen, wenn er beim ersten Wurf erfolgreich war. Dieser zweite Freiwurf war dann in jedem Fall der letzte. Angenommen, Dirk Nowitzki wäre unter dieser Regel 50-mal gefoult worden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Freiwürfe, die er hätte er ausführen dürfen. (6 Punkte)

e) Ganz am Ende eines Spieles kann es zu der Situation kommen, dass ein Spieler noch 2 Freiwürfe erhält und das Spiel unmittelbar danach beendet ist. Für einen verwandelten Freiwurf erhält die Mannschaft einen Punkt.

(1) *Beurteilen Sie die Siegchancen für die Dallas Mavericks, wenn Dirk Nowitzki in einer solchen Situation die letzten 2 Freiwürfe erhält und seine Mannschaft mit 1 Punkt im Rückstand liegt. Gehen Sie dabei davon aus, dass im Fall eines Unentschieden in der folgenden Verlängerung die Siegchance für beide Mannschaften 50 % beträgt.*

(2) *Zeigen Sie, wie man das Ergebnis unter (1) auf einen beliebigen Spieler verallgemeinern kann.* (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p								
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
		p								

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$.

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \quad = \quad \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36								0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
		p									

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	85	
	15			0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	84	
	16			0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	83	
	17			0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	82	
	18			0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	81	
	19			0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	80	
	20			0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	79	
	21			0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	78	
	22			0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0000	77	
	23				0,8109	0,3711	0,0755	0,0000	76	
	24				0,8686	0,4617	0,1136	0,0000	75	
	25				0,9125	0,5535	0,1631	0,0000	74	
	26				0,9442	0,6417	0,2244	0,0000	73	
	27				0,9658	0,7224	0,2964	0,0000	72	
	28				0,9800	0,7925	0,3768	0,0000	71	
	29				0,9888	0,8505	0,4623	0,0000	70	
	30				0,9939	0,8962	0,5491	0,0000	69	
	31				0,9969	0,9307	0,6331	0,0001	68	
	32				0,9984	0,9554	0,7107	0,0002	67	
	33				0,9993	0,9724	0,7793	0,0004	66	
100	34				0,9997	0,9836	0,8371	0,0009	65	100
	35				0,9999	0,9906	0,8839	0,0018	64	
	36				0,9999	0,9948	0,9201	0,0033	63	
	37					0,9973	0,9470	0,0060	62	
	38					0,9986	0,9660	0,0105	61	
	39					0,9993	0,9790	0,0176	60	
	40					0,9997	0,9875	0,0284	59	
	41					0,9999	0,9928	0,0443	58	
	42					0,9999	0,9960	0,0666	57	
	43						0,9979	0,0967	56	
	44						0,9989	0,1356	55	
	45						0,9995	0,1841	54	
	46						0,9997	0,2421	53	
	47						0,9999	0,3086	52	
	48						0,9999	0,3822	51	
	49							0,4602	50	
	50							0,5398	49	
	51							0,6178	48	
	52							0,6914	47	
	53							0,7579	46	
	54							0,8159	45	
	55							0,8644	44	
	56							0,9033	43	
	57							0,9334	42	
	58							0,9557	41	
	59							0,9716	40	
	60							0,9824	39	
	61							0,9895	38	
	62							0,9940	37	
	63							0,9967	36	
	64							0,9982	35	
	65							0,9991	34	
	66							0,9996	33	
	67							0,9998	32	
	68							0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200 und *n* = 300

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = 200			
	p		
k	0,2	0,25	
19	0,0000	0,0000	180
20	0,0001	0,0000	179
21	0,0002	0,0000	178
22	0,0005	0,0000	177
23	0,0010	0,0000	176
24	0,0020	0,0000	175
25	0,0036	0,0000	174
26	0,0064	0,0000	173
27	0,0110	0,0000	172
28	0,0179	0,0001	171
29	0,0283	0,0002	170
30	0,0430	0,0004	169
31	0,0632	0,0008	168
32	0,0899	0,0014	167
33	0,1239	0,0026	166
34	0,1656	0,0044	165
35	0,2151	0,0073	164
36	0,2717	0,0117	163
37	0,3345	0,0182	162
38	0,4019	0,0276	161
39	0,4718	0,0405	160
40	0,5422	0,0578	159
41	0,6108	0,0804	158
42	0,6758	0,1089	157
43	0,7355	0,1438	156
44	0,7887	0,1852	155
45	0,8349	0,2332	154
46	0,8738	0,2870	153
47	0,9056	0,3458	152
48	0,9310	0,4083	151
49	0,9506	0,4729	150
50	0,9655	0,5379	149
51	0,9764	0,6017	148
52	0,9843	0,6626	147
53	0,9897	0,7192	146
54	0,9934	0,7707	145
55	0,9959	0,8162	144
56	0,9975	0,8555	143
57	0,9985	0,8885	142
58	0,9991	0,9157	141
59	0,9995	0,9375	140
60	0,9997	0,9546	139
61	0,9998	0,9677	138
62	0,9999	0,9774	137
63	1,0000	0,9846	136
64	1,0000	0,9897	135
65	1,0000	0,9932	134
66	1,0000	0,9956	133
67	1,0000	0,9972	132
68	1,0000	0,9983	131
69	1,0000	0,9990	130
70	1,0000	0,9994	129
71	1,0000	0,9996	128
72	1,0000	0,9998	127
73	1,0000	0,9999	126
74	1,0000	0,9999	125
75	1,0000	1,0000	124

n = 300			
	p		
k	0,2	0,25	
34	0,0000	0,0000	265
35	0,0001	0,0000	264
36	0,0002	0,0000	263
37	0,0003	0,0000	262
38	0,0006	0,0000	261
39	0,0010	0,0000	260
40	0,0017	0,0000	259
41	0,0028	0,0000	258
42	0,0044	0,0000	257
43	0,0069	0,0000	256
44	0,0106	0,0000	255
45	0,0158	0,0000	254
46	0,0230	0,0000	253
47	0,0328	0,0001	252
48	0,0457	0,0001	251
49	0,0622	0,0002	250
50	0,0830	0,0003	249
51	0,1084	0,0006	248
52	0,1388	0,0009	247
53	0,1745	0,0015	246
54	0,2152	0,0024	245
55	0,2607	0,0037	244
56	0,3106	0,0057	243
57	0,3639	0,0084	242
58	0,4197	0,0123	241
59	0,4770	0,0175	240
60	0,5345	0,0246	239
61	0,5910	0,0338	238
62	0,6455	0,0456	237
63	0,6970	0,0606	236
64	0,7447	0,0790	235
65	0,7879	0,1013	234
66	0,8264	0,1278	233
67	0,8600	0,1586	232
68	0,8888	0,1938	231
69	0,9131	0,2333	230
70	0,9330	0,2767	229
71	0,9492	0,3235	228
72	0,9621	0,3732	227
73	0,9721	0,4250	226
74	0,9798	0,4778	225
75	0,9856	0,5310	224
76	0,9899	0,5834	223
77	0,9930	0,6342	222
78	0,9953	0,6827	221
79	0,9968	0,7281	220
80	0,9979	0,7699	219
81	0,9986	0,8077	218
82	0,9991	0,8414	217
83	0,9995	0,8709	216
84	0,9997	0,8963	215
85	0,9998	0,9178	214
86	0,9999	0,9357	213
87	0,9999	0,9504	212
88	1,0000	0,9623	211
89	1,0000	0,9717	210
90	1,0000	0,9790	209
91	1,0000	0,9847	208
92	1,0000	0,9890	207
93	1,0000	0,9922	206
94	1,0000	0,9945	205
95	1,0000	0,9962	204
96	1,0000	0,9974	203
97	1,0000	0,9983	202
98	1,0000	0,9989	201
99	1,0000	0,9993	200
100	1,0000	0,9995	199
101	1,0000	0,9997	198
102	1,0000	0,9998	197
103	1,0000	0,9999	196
104	1,0000	0,9999	195
105	1,0000	1,0000	194
	0,8	0,75	*k*
	p		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$.

Name: ____________________

Tabelle 5: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. Inhaltliche Schwerpunkte
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Einseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

1. Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer bei 10 Versuchen ist $B_{10;0,904}$–verteilt.

   Also ist $P(X=8)=\binom{10}{8}\cdot 0,904^8\cdot 0,096^2\approx 0,185=18,5\,\%$.

2. $P(X\le 8)=1-P(X>8)=1-(10\cdot 0,904^9\cdot 0,096+0,904^{10})\approx 0,248=24,8\,\%$.

3. Man betrachtet das Gegenereignis, dass er fünf Treffer hintereinander schafft. Hierfür beträgt die Wahrscheinlichkeit $0,904^5\approx 0,604$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $1-0,604=0,396=39,6\,\%$.

(Alternative Lösung über Pfadregeln möglich: $\sum_{k=0}^{4}0,096\cdot 0,904^k\approx 0,396$)

Modelllösung b)

Es sei X $B_{263;0,904}$–verteilt; dann ist $\mu=263\cdot 0,904=237,752$ und $\sigma=\sqrt{263\cdot 0,904\cdot 0,096}\approx 4,78$. Die Abweichung von der erwarteten Trefferanzahl beträgt bei 231 Treffern daher $6,752\approx 1,41\sigma<1,64\sigma$. Somit ist die Abweichung nicht signifikant auf dem 5 %-Signifikanzniveau.

Modelllösung c)

Als Nullhypothese wird $H_0: p>0,9$ gewählt, da diese möglichst mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 10 % verworfen werden soll. Es sei $\{k,k+1,...,50\}$ der Annahmebereich. Dann ist k die größte ganze Zahl, für die $P(X<k)\le 0,1$ gilt, wobei X $B_{50;0,9}$–verteilt ist. Aus der Tabelle liest man $P(X\le 42)=0,1221$ und $P(X\le 41)=0,0579$ ab. Somit ist $k=42$ und die Entscheidungsregel lautet: Bei weniger als 42 Treffern wird die Hypothese verworfen, d. h., bei weniger als 42 Treffern geht der Trainer mit seiner Vermutung an die Öffentlichkeit.

Modelllösung d)

Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Würfe bei der „1+1-Regel“ angibt. Dann ist der Erwartungswert von X gesucht. Es gilt:

$P(X = 1) = 1 - 0,904 = 0,096$ (erster Wurf trifft nicht)

und

$P(X = 2) = 0,904$ (erster Wurf trifft).

Also folgt $E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) = 0,096 + 2 \cdot 0,904 = 1,904$.

Bei 50 Fouls hätte Nowitzki 50 · 1,904 = 95,2, also ungefähr 95 Freiwürfe ausführen dürfen. (Elementare Argumentation ist auch möglich.)

Modelllösung e)

1. Die Zufallsvariable X für die Anzahl der Treffer ist $B_{2;0,904}$–verteilt; dann ist

   $P(X = 2) = 0,904^2 \approx 0,817$
   $P(X = 1) = 2 \cdot 0,904 \cdot 0,096 = 0,174.$

   Dallas gewinnt das Spiel nach 1 Punkt Rückstand zu 50 % für $X = 1$ und sicher für $X = 2$. Daher beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit $0,817 + 0,087 = 0,904$.
2. Verallgemeinert man dies auf einen beliebigen Spieler mit Trefferwahrscheinlichkeit p, so muss man in obiger Rechnung nur 0,904 durch p ersetzen und erhält als Gewinnwahrscheinlichkeit $p^2 + \frac{1}{2} \cdot 2p(1-p) = p$. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für das Team ist in diesem Fall also genau gleich der Trefferwahrscheinlichkeit des Freiwurfschützen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	ermittelt die Zufallsvariable und deren Verteilung für (1) und (2).	2 (II)
2	berechnet die erste gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2 (I)
3	berechnet die zweite gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4 (I)
4	berechnet die dritte gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**Maximal Erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet den Erwartungswert.	2 (I)
2	berechnet die Standardabweichung.	2 (I)
3	bestimmt die Abweichung vom Erwartungswert in Relation zur Standardabweichung.	3 (II)
4	interpretiert das Ergebnis aus 3.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	beschreibt das Testverfahren und ermittelt eine sinnvolle Nullhypothese.	5 (II)
2	ermittelt den Wert der Variablen k.	4 (III)
3	bestimmt eine Entscheidungsregel.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die Zufallsvariable, deren Erwartungswert zu berechnen ist.	3 (II)
2	berechnet den Erwartungswert.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die Zufallsvariable und deren Verteilung an.	3 (I)
2	bestimmt die Gewinnwahrscheinlichkeit.	4 (II)
3	zeigt die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Spieler.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Zufallsvariable …	2 (II)			
2	berechnet die erste …	2 (I)			
3	berechnet die zweite …	4 (I)			
4	berechnet die dritte …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………..					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Erwartungswert.	2 (I)			
2	berechnet die Standardabweichung.	2 (I)			
3	bestimmt die Abweichung …	3 (II)			
4	interpretiert das Ergebnis …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………..					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt das Testverfahren …	5 (II)			
2	ermittelt den Wert …	4 (III)			
3	bestimmt eine Entscheidungsregel.	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………..					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Zufallsvariable …	3 (II)			
2	berechnet den Erwartungswert.	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………..					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt die Zufallsvariable …	3 (I)			
2	bestimmt die Gewinnwahrscheinlichkeit.	4 (II)			
3	zeigt die Verallgemeinerung …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………..					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

> ## Kultur: Wieder mehr Leseratten
> ***Bertelsmann Stiftung ließ 2.500 Bundesbürger befragen***
>
> ■**München** (AP). In Deutschland gibt es wieder mehr Leseratten. Wie die Bertelsmann Stiftung gestern mitteilte, ist der Anteil der Lesefans seit 1996 von 22 auf 25 Prozent gestiegen. Die Zahl der Buchmuffel sank dagegen um fünf Punkte auf 15 Prozent. Dies ist das Ergebnis einer Befragung von 2.500 Bundesbürgern ab 14 Jahren, die das infas-Institut für Bertelsmann durchführte.

Auszug aus der Neuen Westfälischen vom 06.12.1999

a) Angenommen, die Zeitungsmeldung stimmt und die Prozentsätze von 1999 gelten auch heute noch.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 8 zufällig ausgesuchten Personen

(1) *genau 2 zu den Lesefans gehören,*

(2) *keine Person Lesefan ist,*

(3) *mindestens 3 Personen Lesefans sind.* (11 Punkte)

b) Firma „Intersoft", die sich sehr stark im Internetbereich engagiert, behauptet, dass der Anteil der Lesefans kleiner ist als 22 %. Sie lässt diese Behauptung durch eine neue Umfrage vom Umfang 2500 prüfen. In der Stichprobe findet man 502 Lesefans.

Bestimmen Sie einen Hypothesentest, den die Firma durchführen wird (Signifikanzniveau 5 %).
Beschreiben Sie den Fehler, den die Firma in dieser Situation begehen kann.

> *Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit Standardabweichung $\sigma > 3$ gilt näherungsweise:*
> $P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$.

(10 Punkte)

Name: ____________________

c) Für die Stadtbibliothek einer Großstadt ist die Anzahl der Lesefans natürlich von großem Interesse. Die Chefin vertritt die Ansicht, dass der Anteil der Lesefans in der Stadt mindestens 30 % beträgt. Sie möchte die Bedeutung der Bibliothek in der Öffentlichkeit durch eine entsprechende Zeitungsmeldung stärken und prüft ihre Vermutung durch eine Umfrage vom Umfang 100.

(1) *Die Chefin will vor dem Hintergrund ihres großen Interesses an einer Zeitungsmeldung ihre Ansicht nur ablehnen, wenn in der Stichprobe weniger als 24 Lesefans sind. Nennen Sie ihre dazugehörige Nullhypothese und bestimmen Sie die größtmögliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass fälschlicherweise keine positive Zeitungsmeldung erscheint.*

(2) *Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel zum Signifikanzniveau 1 %.*

(3) *Erklären Sie, welche Nullhypothese die Stadtverwaltung wählen wird, die für die Finanzierung von Erweiterungen der Bibliothek zuständig ist.* (12 Punkte)

d) Die in Aufgabe c) beschriebenen Voraussetzungen sollen weiterhin gelten. Die Bibliothek wählt die in c) unter (1) formulierte Entscheidungsregel. Angenommen, der wirkliche Anteil der Lesefans beträgt nur 20 %.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Öffentlichkeit falsch informiert wird.*

(2) *Erklären Sie ohne weitere Rechnung, wie diese Fehlerwahrscheinlichkeit bei gleichbleibendem Stichprobenumfang verringert werden kann. Beurteilen Sie die Konsequenz dieser Vorgehensweise für einen anderen möglichen Fehler.* (9 Punkte)

e) Anna will die Stichprobe vom Umfang 8 in Aufgabe a) durch ein Modell simulieren. Sie legt in einen Behälter 40 Kugeln, davon 10 rote und 30 weiße, durchmischt sie gut und zieht nacheinander 8 Kugeln, ohne diese zurückzulegen.

(1) *Erklären Sie, weshalb Anna das Modell so wählt.*

(2) *Begründen Sie, weshalb Annas Modell die Situation in Aufgabe a) dennoch nicht angemessen simuliert.* (8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. , $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \quad = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	50
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

(Spaltenkopf oben: *p*; Spaltenfuß unten: *p*)

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert .

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

n	k	p = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5	k	n
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	85	
	15			0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	84	
	16			0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	83	
	17			0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	82	
	18			0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	81	
	19			0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	80	
	20			0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	79	
	21			0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	78	
	22			0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0000	77	
	23				0,8109	0,3711	0,0755	0,0000	76	
	24				0,8686	0,4617	0,1136	0,0000	75	
	25				0,9125	0,5535	0,1631	0,0000	74	
	26				0,9442	0,6417	0,2244	0,0000	73	
	27				0,9658	0,7224	0,2964	0,0000	72	
	28				0,9800	0,7925	0,3768	0,0000	71	
	29				0,9888	0,8505	0,4623	0,0000	70	
	30				0,9939	0,8962	0,5491	0,0000	69	
	31				0,9969	0,9307	0,6331	0,0001	68	
	32				0,9984	0,9554	0,7107	0,0002	67	
	33				0,9993	0,9724	0,7793	0,0004	66	
100	34				0,9997	0,9836	0,8371	0,0009	65	100
	35				0,9999	0,9906	0,8839	0,0018	64	
	36				0,9999	0,9948	0,9201	0,0033	63	
	37					0,9973	0,9470	0,0060	62	
	38					0,9986	0,9660	0,0105	61	
	39					0,9993	0,9790	0,0176	60	
	40					0,9997	0,9875	0,0284	59	
	41					0,9999	0,9928	0,0443	58	
	42					0,9999	0,9960	0,0666	57	
	43						0,9979	0,0967	56	
	44						0,9989	0,1356	55	
	45						0,9995	0,1841	54	
	46						0,9997	0,2421	53	
	47						0,9999	0,3086	52	
	48						0,9999	0,3822	51	
	49							0,4602	50	
	50							0,5398	49	
	51							0,6178	48	
	52							0,6914	47	
	53							0,7579	46	
	54							0,8159	45	
	55							0,8644	44	
	56							0,9033	43	
	57							0,9334	42	
	58							0,9557	41	
	59							0,9716	40	
	60							0,9824	39	
	61							0,9895	38	
	62							0,9940	37	
	63							0,9967	36	
	64							0,9982	35	
	65							0,9991	34	
	66							0,9996	33	
	67							0,9998	32	
	68							0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5 = p	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert.

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200 und *n* = 300

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = 200

k	*p* = 0,2	*p* = 0,25	
19	0,0000	0,0000	180
20	0,0001	0,0000	179
21	0,0002	0,0000	178
22	0,0005	0,0000	177
23	0,0010	0,0000	176
24	0,0020	0,0000	175
25	0,0036	0,0000	174
26	0,0064	0,0000	173
27	0,0110	0,0000	172
28	0,0179	0,0001	171
29	0,0283	0,0002	170
30	0,0430	0,0004	169
31	0,0632	0,0008	168
32	0,0899	0,0014	167
33	0,1239	0,0026	166
34	0,1656	0,0044	165
35	0,2151	0,0073	164
36	0,2717	0,0117	163
37	0,3345	0,0182	162
38	0,4019	0,0276	161
39	0,4718	0,0405	160
40	0,5422	0,0578	159
41	0,6108	0,0804	158
42	0,6758	0,1089	157
43	0,7355	0,1438	156
44	0,7887	0,1852	155
45	0,8349	0,2332	154
46	0,8738	0,2870	153
47	0,9056	0,3458	152
48	0,9310	0,4083	151
49	0,9506	0,4729	150
50	0,9655	0,5379	149
51	0,9764	0,6017	148
52	0,9843	0,6626	147
53	0,9897	0,7192	146
54	0,9934	0,7707	145
55	0,9959	0,8162	144
56	0,9975	0,8555	143
57	0,9985	0,8885	142
58	0,9991	0,9157	141
59	0,9995	0,9375	140
60	0,9997	0,9546	139
61	0,9998	0,9677	138
62	0,9999	0,9774	137
63	1,0000	0,9846	136
64	1,0000	0,9897	135
65	1,0000	0,9932	134
66	1,0000	0,9956	133
67	1,0000	0,9972	132
68	1,0000	0,9983	131
69	1,0000	0,9990	130
70	1,0000	0,9994	129
71	1,0000	0,9996	128
72	1,0000	0,9998	127
73	1,0000	0,9999	126
74	1,0000	0,9999	125
75	1,0000	1,0000	124

n = 300

k	*p* = 0,2	*p* = 0,25	
34	0,0000	0,0000	265
35	0,0001	0,0000	264
36	0,0002	0,0000	263
37	0,0003	0,0000	262
38	0,0006	0,0000	261
39	0,0010	0,0000	260
40	0,0017	0,0000	259
41	0,0028	0,0000	258
42	0,0044	0,0000	257
43	0,0069	0,0000	256
44	0,0106	0,0000	255
45	0,0158	0,0000	254
46	0,0230	0,0000	253
47	0,0328	0,0001	252
48	0,0457	0,0001	251
49	0,0622	0,0002	250
50	0,0830	0,0003	249
51	0,1084	0,0006	248
52	0,1388	0,0009	247
53	0,1745	0,0015	246
54	0,2152	0,0024	245
55	0,2607	0,0037	244
56	0,3106	0,0057	243
57	0,3639	0,0084	242
58	0,4197	0,0123	241
59	0,4770	0,0175	240
60	0,5345	0,0246	239
61	0,5910	0,0338	238
62	0,6455	0,0456	237
63	0,6970	0,0606	236
64	0,7447	0,0790	235
65	0,7879	0,1013	234
66	0,8264	0,1278	233
67	0,8600	0,1586	232
68	0,8888	0,1938	231
69	0,9131	0,2333	230
70	0,9330	0,2767	229
71	0,9492	0,3235	228
72	0,9621	0,3732	227
73	0,9721	0,4250	226
74	0,9798	0,4778	225
75	0,9856	0,5310	224
76	0,9899	0,5834	223
77	0,9930	0,6342	222
78	0,9953	0,6827	221
79	0,9968	0,7281	220
80	0,9979	0,7699	219
81	0,9986	0,8077	218
82	0,9991	0,8414	217
83	0,9995	0,8709	216
84	0,9997	0,8963	215
85	0,9998	0,9178	214
86	0,9999	0,9357	213
87	0,9999	0,9504	212
88	1,0000	0,9623	211
89	1,0000	0,9717	210
90	1,0000	0,9790	209
91	1,0000	0,9847	208
92	1,0000	0,9890	207
93	1,0000	0,9922	206
94	1,0000	0,9945	205
95	1,0000	0,9962	204
96	1,0000	0,9974	203
97	1,0000	0,9983	202
98	1,0000	0,9989	201
99	1,0000	0,9993	200
100	1,0000	0,9995	199
101	1,0000	0,9997	198
102	1,0000	0,9998	197
103	1,0000	0,9999	196
104	1,0000	0,9999	195
105	1,0000	1,0000	194
	0,8	0,75	*k*
	p		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert.

Name: ____________________

Tabelle 5: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2008

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2008

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Einseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung, Tabellen der Binomialverteilung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Lesefans in der Stichprobe. X sei binomialverteilt mit p = 0,25 und n = 8.

(1) $P(X=2)=\binom{8}{2}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^6\approx 0,3115$

(2) $P(X=0)=0,75^8\approx 0,1001$

(3) $P(X\geq 3)=1-P(X\leq 2)=1-(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2))\approx 0,3214$, wobei

$P(X=1)=8\cdot 0,25\cdot 0,75^7\approx 0,2670$

Modelllösung b)

Der gravierendere Fehler für die Firma ist, fälschlicherweise von der Richtigkeit der Behauptung auszugehen. Sie testet $H_0: p\geq 0,22$ gegen $H_1: p<0,22$.

Für n = 2500 und p = 0,22 erhält man $\mu=n\cdot p=550$ und $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}\approx 20,71>3$.

Mit der Näherungslösung und aufgrund der Symmetrie der Verteilung gilt für das Signifikanzniveau: $\alpha=P(X<\mu-1,64\cdot\sigma)\approx 0,05$. $\mu-1,64\cdot\sigma\approx 516,03$. Die Hypothese wird also abgelehnt, falls weniger als 517 Lesefans in der Stichprobe sind.
Die Firma lehnt H_0 ab und geht von der Richtigkeit ihrer Behauptung aus. Der mögliche Fehler ist der Fehler 1. Art, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie stimmt, d. h. fälschlicherweise von der Richtigkeit der Behauptung auszugehen.

Anmerkung: Mit einer anderen Begründung, etwa dem Interesse der Firma, die Behauptung für Werbezwecke nutzen zu wollen, kann auch $H_0: p<0,22$ zugelassen werden.

Modelllösung c)

(1) Zum Ablehnungsbereich [0; 23] gehört die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,3$. Eine positive Zeitungsmeldung erscheint fälschlicherweise nicht, wenn die Anzahl der Lesefans im Ablehnungsbereich liegt, obwohl die Hypothese stimmt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt somit: $P(X \leq 23) \approx 7,55\,\%$ (Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen mit n = 100 und p = 0,3).

(2) Gesucht ist maximales k, so dass $P(X \leq k) \leq 0,01$. Mit Hilfe der Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen (n = 100; p = 0,3) erhält man $P(X \leq 19) \approx 0,0089$ und $P(X \leq 20) \approx 0,0165$. Die Nullhypothese ist also auf einem Signifikanzniveau von 1 % abzulehnen, wenn sich höchstens 19 Lesefans in der Stichprobe befinden.

(3) Die Stadtverwaltung wählt $H_0 : p < 0,3$. Sie möchte sich damit gegen Fehlinvestitionen schützen und das Risiko, fälschlicherweise von der Richtigkeit der Ansicht der Chefin auszugehen, gering halten.

Modelllösung d)

(1) Die Öffentlichkeit wird falsch informiert, wenn sich die Anzahl der Lesefans im Annahmebereich [24; 100] befindet. Gesucht ist also
$P(X \geq 24) = 1 - P(X \leq 23) \approx 1 - 0,8109 = 0,1891$ (Tabelle für kumulierte Binomialverteilungen mit n = 100 und p = 0,2).

(2) Eine Verkleinerung des Annahmebereiches führt zu einer Verringerung der dazugehörigen Wahrscheinlichkeit, d. h. der Wahrscheinlichkeit für eine falsche Information der Öffentlichkeit. Allerdings erhöht sich wegen des größeren Ablehnungsbereiches die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Öffentlichkeit nicht informiert wird, obwohl die Hypothese stimmt.

Modelllösung e)

(1) Das Entnehmen einer Stichprobe entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen.
Man hat zwei mögliche Versuchsergebnisse auf jeder Stufe (rot oder weiß). Die Wahrscheinlichkeit, im ersten Zug eine rote Kugel zu ziehen, ist $p = \frac{10}{40} = 0{,}25$.
Diese ist gleich dem Anteil der Lesefans in der Bevölkerung.

(2) Wenn im ersten Zug eine rote Kugel gezogen wird, ist die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel im zweiten Zug gleich $\frac{9}{39} \approx 0{,}2308$. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich von Stufe zu Stufe deutlich, d. h., die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe ist nicht binomialverteilt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	gibt die Zufallsvariable und die Parameter an und berechnet $P(X = 2)$.	4 (I)
2	berechnet $P(X = 0)$.	2 (I)
3	berechnet $P(X \geq 3)$.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt die Nullhypothese.	2 (II)
2	bestimmt die Entscheidungsregel.	6 (II)
3	beschreibt den Fehler 1. Art.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	nennt die Nullhypothese.	2 (I)
2	bestimmt die größtmögliche Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.	3 (II)
3	bestimmt die Entscheidungsregel zum Signifikanzniveau 1 %.	5 (II)
4	erklärt die Wahl der Nullhypothese durch die Stadtverwaltung.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt den Ansatz zur Berechnung des Fehlers 2. Art.	3 (II)
2	berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2 (I)
3	erklärt die Verkleinerung des Annahmebereiches.	2 (II)
4	beurteilt die Konsequenz für den Fehler 1. Art in der Anwendungssituation.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	erklärt die Analogie zur Realsituation.	4 (II)
2	begründet, dass keine Binomialverteilung vorliegt.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Zufallsvariable …	4 (I)			
2	berechnet $P(X = 0)$.	2 (I)			
3	berechnet $P(X \geq 3)$.	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Nullhypothese.	2 (II)			
2	bestimmt die Entscheidungsregel.	6 (II)			
3	beschreibt den Fehler …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	nennt die Nullhypothese.	2 (I)			
2	bestimmt die größtmögliche …	3 (II)			
3	bestimmt die Entscheidungsregel …	5 (II)			
4	erklärt die Wahl …	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Ansatz …	3 (II)			
2	berechnet die gesuchte …	2 (I)			
3	erklärt die Verkleinerung …	2 (II)			
4	beurteilt die Konsequenz …	2 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	erklärt die Analogie …	4 (II)			
2	begründet, dass keine …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0