Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ wird das Wachstum einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Jahren) beschrieben. Dabei gibt $f(t)$ nicht die Höhe, sondern die Wachstumsgeschwindigkeit in Metern pro Jahr (zum Zeitpunkt t) an. Der Graph von f ist auf Seite 2 dargestellt.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat eine frisch eingepflanzte Fichte eine Höhe von ca. 20 cm.

a) *Berechnen Sie den Funktionswert von f an der Stelle* $t = 30$ *und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.*
Beschreiben Sie anhand des Graphen von f, wie sich die Fichte im Laufe der Jahre entwickelt. (11 Punkte)

b) *Bestimmen Sie rechnerisch das Alter, in dem die Fichte am stärksten wächst.*
Geben Sie zudem die größte Wachstumsgeschwindigkeit an. (11 Punkte)

[Es gilt: $f''(t) = 0{,}0002 \cdot (t^2 - 40t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$. Nachweis nicht erforderlich!]

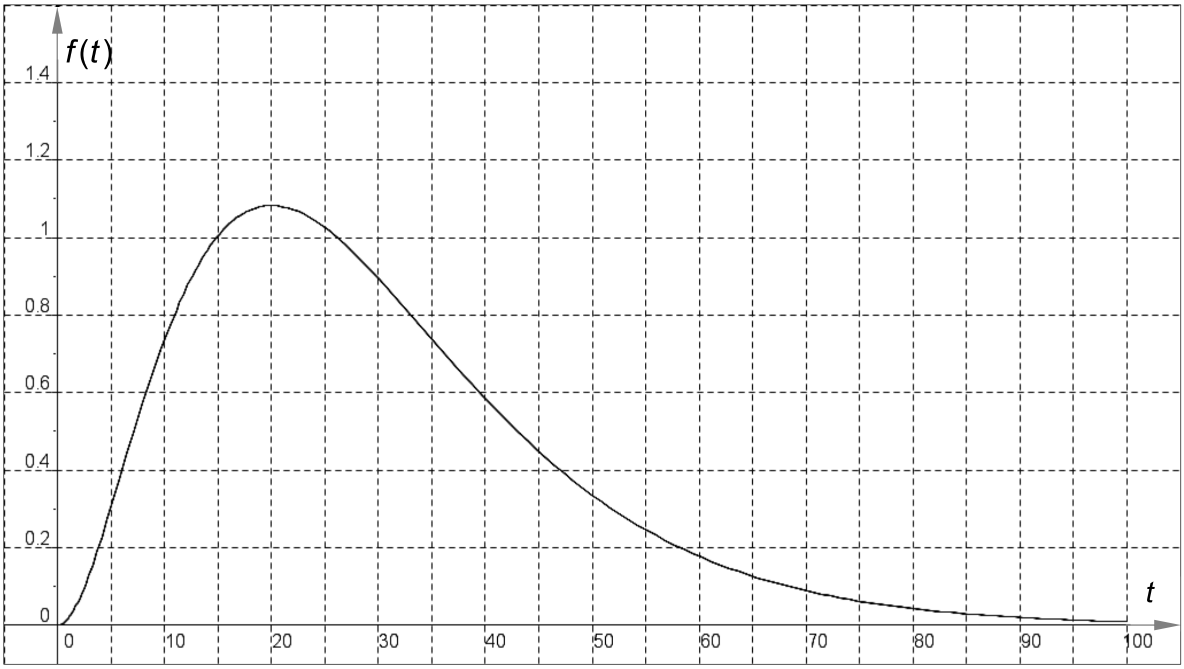
c) *Begründen Sie anhand des Graphen von f, dass die Fichte nach 20 Jahren weniger als 20 Meter hoch ist.*
Zeigen Sie, dass durch $F(t) = -0{,}2 \cdot (t^2 + 20t + 200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ *eine Stammfunktion von f gegeben ist.*
Berechnen Sie die zu erwartende Höhe der Fichte nach 20 Jahren. (16 Punkte)

d) *Begründen Sie durch Eigenschaften der Funktion f, dass F eine Wendestelle hat.* (5 Punkte)

e) In einem Lexikon steht, dass bestimmte Fichtenarten bis zu 60 m hoch werden können.

Ermitteln Sie, welche Höhe eine Fichte, deren Wachstum durch die Funktion f beschrieben wird, maximal erreichen kann (gerundet auf ganze Meter). (7 Punkte)

Fichte (Längenwachstum in Meter/Jahr)



Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$f(30) = 0{,}02 \cdot 30^2 \cdot e^{-3} \approx 0{,}896$
Eine 30-jährige Fichte wächst mit einer Geschwindigkeit von ca. 90 cm (0,896 m) pro Jahr. Der Baum wächst die ganze Zeit ($f(t) > 0$). Zu Beginn nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit sehr schnell zu (6-jährig ca. 0,4 m/a) und erreicht nach ungefähr 20 Jahren die größte Geschwindigkeit (mehr als 1 m/a – weniger als 1,2 m/a). Danach wächst die Fichte wieder langsamer, bis nach etwa 70 Jahren die Geschwindigkeit auf etwa 0,1 m/a gesunken ist. Mit 100 Jahren ist der Baum praktisch ausgewachsen (Wachstumsgeschwindigkeit nur noch unwesentlich größer als 0).

Modelllösung b)

Bestimmung der Extremstellen:
$f'(t) = ... = (0{,}04t - 0{,}002t^2)e^{-0{,}1t}$ (Produkt- und Kettenregel)
$f'(t) = 0$ führt zu den möglichen Extremstellen: $t_1 = 0$; $t_2 = 20$. ($f''(20) < 0$, 20 ist lokale Maximumstelle)
Der Graph zeigt, dass das Maximum bei t_2 liegen muss.
$f(20) \approx 1{,}083$
Eine 20-jährige Fichte wächst am stärksten, nämlich etwa 1,08 m pro Jahr.

Modelllösung c)

Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f gibt den Gesamtlängenzuwachs des Baumes an. Abschätzen der Fläche (z. B. durch ein Trapez) führt zu einem Wert, der deutlich unter 20 liegt. Die Anfangshöhe von 0,2 m kann dabei vernachlässigt werden.
$F'(t) = f(t)$ (Produkt- und Kettenregel) zeigt, dass F eine Stammfunktion von ist.

$$\int_o^{20} f(t)dt = [F(t)]_0^{20} \approx 12{,}93$$

Es ist eine Höhe von 13,13 m zu erwarten (etwas mehr als 13 m). Dabei ist die Anfangshöhe berücksichtigt.

Modelllösung d)

Die Funktion f hat an der Stelle 20 eine lokale Extremstelle (d.h. $f'(20) = 0$).
Wegen $F''(t) = f'(t)$ hat F bei 20 eine mögliche Wendestelle. Wegen $f''(20) < 0$ (oder wegen des Vorzeichenwechsels von f' bei 20) folgt, dass F bei 20 eine Wendestelle hat.

Modelllösung e)

Für die Höhe der Fichte im Jahr z ($z > 0$) gilt:

$$h(z) = 0{,}2 + \int_0^z f(t)dt = -0{,}2(z^2 + 20z + 200)e^{-0{,}1z} + 40{,}2 \text{ (in m)}.$$

Der erste Summand ist kleiner als 0, aber für hinreichend große z nahe bei 0 (z. B. –0,11 für $z = 100$).
Bei angemessener Rundung kann man sagen:
Eine Fichte, deren Wachstum durch die vorliegende Funktion f beschrieben wird, kann etwa 40 m hoch werden.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet den Funktionswert an der Stelle 30.	2 (I)
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)
3	beschreibt die Entwicklung der Fichte.	6 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die 1. Ableitung.	3 (I)
2	bestimmt das gesuchte Alter.	6 (II)
3	gibt die stärkste Wachstumsgeschwindigkeit an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet anhand einer geeigneten Abschätzung.	4 (II)
2	zeigt, dass F eine Stammfunktion von f ist.	4 (II)
3	berechnet das bestimmte Integral.	6 (I)
4	bestimmt die Höhe unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet, dass F eine Wendestelle hat.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die Höhe einer Fichte zum Zeitpunkt $t = z$.	3 (III)
2	ermittelt die maximale Höhe.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)			
3	beschreibt die Entwicklung …	6 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (11):					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die 1. Ableitung.	3 (I)			
2	bestimmt das gesuchte …	6 (II)			
3	gibt die stärkste …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (11):					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet anhand einer …	4 (II)			
2	zeigt, dass F …	4 (II)			
3	berechnet das bestimmte …	6 (I)			
4	bestimmt die Höhe…	2 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (16): ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass F …	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (5): ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Höhe …	3 (III)			
2	ermittelt die maximale …	4 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (7): ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung des Koordinatensystems die Steigung 144. $P(8\,|\,128)$ ist der Wendepunkt des Graphen.

a) *Bestimmen Sie den zugehörigen Funktionsterm mit Hilfe eines geeigneten Gleichungssystems.* (12 Punkte)

Benutzen Sie im Folgenden

$$f(t) = t^3 - 24t^2 + 144t\ .$$

b) *Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte und die relativen Extrempunkte des Graphen von f.* (14 Punkte)

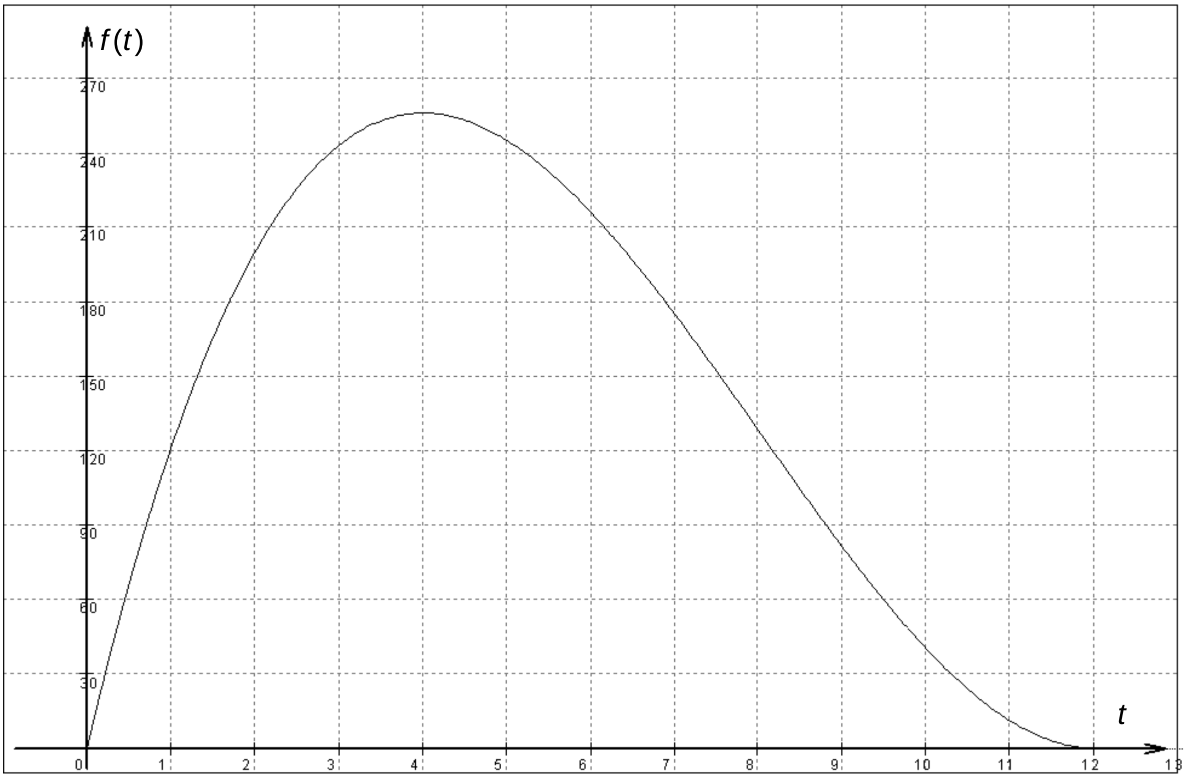
Die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in einem Stausee einer Bergregion lässt sich in den ersten 12 Stunden nach sehr starken Regenfällen näherungsweise durch die obige Funktion f, deren Graph auf Seite 2 abgebildet ist, beschreiben.
[t : Zeit in Stunden (h), $f(t)$: Zuflussgeschwindigkeit in m^3/h]

c) *Begründen Sie mit Hilfe des Graphen und geeigneter Funktionswerte, dass der Zeitraum, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mindestens 120 m^3/h beträgt, länger als 7 Stunden ist.* (4 Punkte)

d) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der t-Achse zwischen* $t = 0$ *und* $t = 12$ *einschließt.*
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (9 Punkte)

e) *Berechnen Sie die Wassermenge, die innerhalb der ersten 2 Stunden zufließt.*
Bestimmen Sie das zwei Stunden umfassende Zeitintervall, in dem die größte Wassermenge zufließt. Ermitteln Sie dazu einen rechnerischen Ansatz, mit dem das gesuchte Intervall bestimmt werden kann. Beschreiben Sie (kurz) den Lösungsweg. Eine Durchführung der Rechnungen ist nicht erforderlich. (11 Punkte)

Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in den ersten 12 Stunden:



Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$; Die „Übersetzung“ des Textes führt zu:

(1) : $f(0) = 0$; (2) : $f'(0) = 144$; (3) : $f(8) = 128$; (4) : $f''(8) = 0$.

Aus (1) und (2) folgt $d = 0$ und $c = 144$. Aus (3) und (4) unter Beachtung der Ergebnisse

für c und d : $-1024 = 512a + 64b \quad \wedge \quad 48a + 2b = 0$

$$\Leftrightarrow \quad -16 = 8a + b \quad \wedge \quad b = -24a$$

$$\Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \quad \wedge \quad b = -24 \qquad (f'''(x) \neq 0 \text{ für alle } x)$$

Modelllösung b)

$f(0) = 0$, also $S_y(0|0)$; $t^3 - 24t^2 + 144t = 0 \Leftrightarrow t \cdot (t^2 - 24t + 144) = 0 \Leftrightarrow ....$
liefert die Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_{2/3} = 12$.
Extremstellen: $f'(t) = 3t^2 - 48\,t + 144$ und $f''(t) = 6t - 48$
$3t^2 - 48t + 144 = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow t = 4 \vee t = 12$
Wegen $f''(4) < 0$ und $f''(12) > 0$ ergeben sich die relativen Extrempunkte $H(4|256)$ und $T(12|0)$.

Modelllösung c)

Der Graph zeigt, dass etwa nach einer Stunde die Zuflussgeschwindigkeit bei 120 m^3/h liegt ($f(1) = 121 > 120$). Da der Graph in diesem Bereich ansteigt, wird die 120 m^3/h-Marke bereits etwas früher erreicht. Der abfallende Graph liegt bei der achten Stunde noch deutlich über 120 ($f(8) = 128$). Für das Zeitintervall $[t_1;t_2]$, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mindestens 120 m^3/h beträgt, gilt also: $t_1 < 1$ und $t_2 > 8$.
Der Zeitraum ist demzufolge länger als 7 Stunden.
(Hilfreich ist eine Parallele zur t-Achse durch $P(0|120)$.)

Modelllösung d)

$\int_0^{12} f(t)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 72t^2\right]_0^{12} = 1728$ (als Flächenmaßzahl der zu berechnenden Fläche)

Da f die Zuflussgeschwindigkeit pro Stunde angibt, wird so die Wassermenge, die insgesamt im Zuflusszeitraum in den Stausee fließt, bestimmt: 1728 m^3.

Modelllösung e)

$\int_0^2 f(t)dt = [F(t)]_0^2 = 228$. In den ersten zwei Stunden fließen insgesamt 228 m^3 zu.

Gesucht ist ein Intervall $[x;x+2]$ mit $0 \le x \le 10$, so dass $\int_x^{x+2} f(t)dt$ maximal wird.

Die Volumenfunktion V zu $V(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$ $[= \frac{1}{4}(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 72(x+2)^2 - \frac{1}{4}x^4 + 8x^3 - 72x^2]$

ist dann auf Extremstellen zu untersuchen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**[1]
1	leitet aus den Angaben ein Gleichungssystem her.	4 (II)
2	bestimmt die Lösungen des Gleichungssystems.	6 (II)
3	gibt den Funktionsterm an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet S_y und die Nullstellen.	5 (I)
2	berechnet die ersten zwei Ableitungen.	3 (I)
3	bestimmt die relativen Extrempunkte.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	begründet, dass der Zeitraum länger als 7 Stunden ist.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)
2	berechnet die Flächenmaßzahl.	4 (I)
3	interpretiert das Ergebnis.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
	Der Prüfling	
1	berechnet die Wassermenge der ersten zwei Stunden.	4 (I)
2	ermittelt einen rechnerischen Ansatz mit Hilfe der Integralrechnung.	5 (III)
3	beschreibt den Lösungsweg.	2 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	leitet aus den …	4 (II)			
2	bestimmt die Lösungen …	6 (II)			
3	gibt den Funktionsterm …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (12): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet S_y und …	5 (I)			
2	berechnet die ersten …	3 (I)			
3	bestimmt die relativen …	6 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (14): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass der …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (4): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)			
2	berechnet die Flächenmaßzahl.	4 (I)			
3	interpretiert das Ergebnis.	2 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (9): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Wassermenge …	4 (I)			
2	ermittelt einen rechnerischen …	5 (III)			
3	beschreibt den Lösungsweg.	2 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (11): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

a) *Ermitteln Sie die Achsenschnittpunkte und die relativen Extrempunkte des Graphen der auf Seite 2 dargestellten Funktion f mit*

$$f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1.$$

Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist. (18 Punkte)

Benutzen Sie im Folgenden, dass einer der Hochpunkte $H(3\,|\,4)$ ist und dass die relativen Hochpunkte auch absolute Hochpunkte sind.

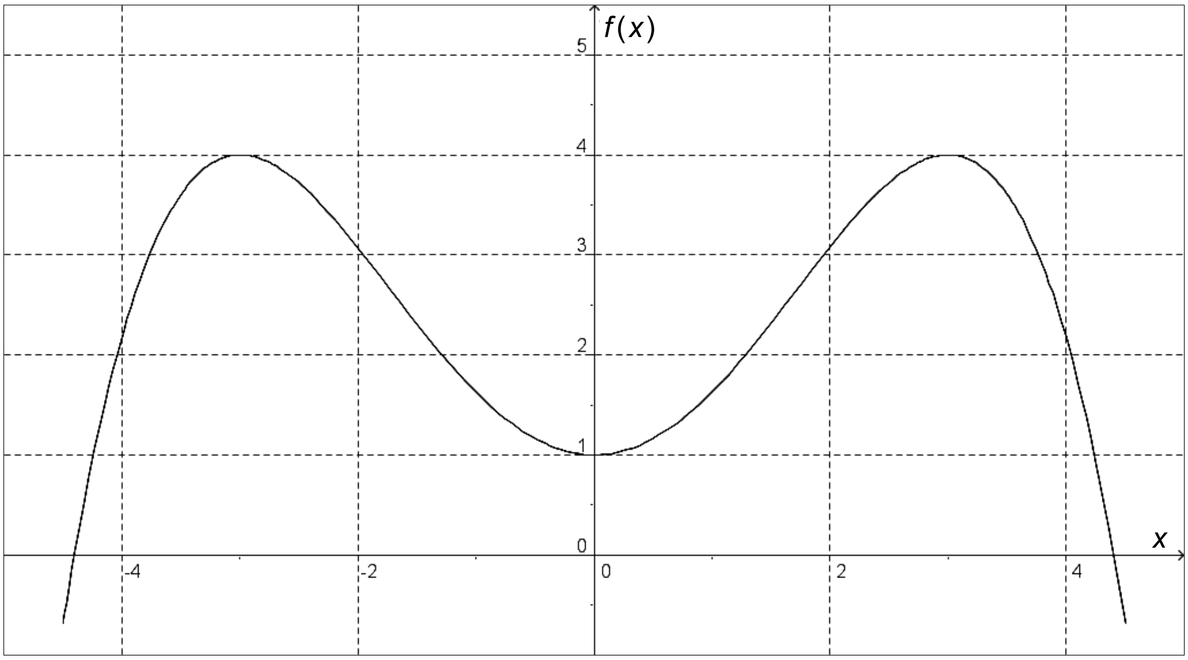
b) Die Gerade *g* mit $y = 4$ verläuft durch die Hochpunkte des Graphen von *f*.

Zeichnen Sie die Gerade g in die Abbildung auf Seite 2 ein.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der Geraden g eingeschlossen wird. (11 Punkte)

c) *Leiten Sie die Gleichung der Parabel her, die ihren Scheitelpunkt im Ursprung hat und die durch die beiden Hochpunkte des Graphen von f verläuft.*
[Zur Kontrolle: $y = \frac{4}{9}x^2$]
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel und der Geraden g aus Teilaufgabe b) eingeschlossen wird.
Zeigen Sie, dass sich der Inhalt A dieser Fläche auch mit der Formel $A = \frac{2}{3} \cdot s \cdot h$ *berechnen lässt, wobei s der Abstand der beiden Schnittpunkte der Geraden g mit der Parabel und h der Abstand des Scheitelpunkts zur Geraden ist.* (13 Punkte)

d) *Zeigen Sie allgemein, dass die obige Formel zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche auch dann gilt, wenn die Parabel zu* $y = \frac{4}{9}x^2$ *von einer beliebigen Parallelen zur x-Achse* $(y = c,\ c > 0)$ *geschnitten wird.* (8 Punkte)

Funktionsgraph zu $f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1$:



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

1 Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|1)$

Nullstellen: Nach Substitution ($z = x^2$) erhält man $z^2 - 18z - 27 = 0$ mit den Lösungen $z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{108}$. Da $z_2 < 0$, erhält man für x nur 2 Lösungen: $x_{1/2} = \pm\sqrt{9+\sqrt{108}} \approx \pm 4{,}4$.

rel. Extrempunkte: $f'(x) = -\frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{3}x = 0$ führt zu den potentiellen Extremstellen

$x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$. Wegen $f''(0) > 0$ und $f''(\pm 3) < 0$ ergeben sich ein rel. Tiefpunkt bei $T(0|0)$ und zwei Hochpunkte: $H_1(3|4)$ und $H_2(-3|4)$.

Symmetrie: Für alle $x \in IR$ gilt $f(x) = f(-x)$

(oder: f ist ganzrational mit ausschließlich geraden Exponenten).

Modelllösung b)

Aufgrund der Vorgaben gilt $f(x) \leq 4$ für alle x ; also ist (z. B.) zu berechnen:

$\int_0^3 (4-(-\frac{1}{27}x^4+\frac{2}{3}x^2+1))dx$. Eine Stammfunktion: $F(x)=\frac{1}{135}x^5-\frac{2}{9}x^3+3x$

Für das bestimmte Integral ergibt sich der Wert 4,8. Flächeninhalt A = 9,6 FE.

Modelllösung c)

Wegen des Scheitelpunkts $S(0|0)$ ist der Ansatz $y = ax^2$ möglich.
Einsetzen der Koordinaten des vorgegeben Punkts führt zu $a=\frac{4}{9}$.

Flächenberechnung (analog zu Teil b)): $\int_0^3 (4-\frac{4}{9}x^2)dx=\left[4x-\frac{4}{27}x^3\right]_0^3=8$.

Also A = 16 FE. Mit s = 6 LE und h = 4 LE liefert die Formel ebenfalls das Ergebnis.

Modelllösung d)

Die Schnittstellen der Geraden mit $y = c$ und der Parabel mit $y=\frac{4}{9}x^2$ liegen bei

$x_{1/2} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{c}$ ($c > 0$). Für die Formel ergeben sich für h und s folgende Maßzahlen:

$h = c$ und $s = 2\cdot \frac{3}{2}\sqrt{c} = 3\sqrt{c}$. Also $A = \frac{2}{3}\cdot c\cdot 3\sqrt{c} = 2c\sqrt{c}$ [FE].

Mit Integration : $\int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{c}} (c-\frac{4}{9}x^2)dx=\ldots=c\sqrt{c}$ (für die halbe Flächenmaßzahl).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet den Schnittpunkt mit der y-Achse.	2 (I)
2	bestimmt die Nullstellen (biquadratische Gleichung).	6 (II)
3	berechnet die notwendigen Ableitungen.	3 (I)
4	bestimmt die Extrempunkte.	5 (II)
5	begründet, dass der Graph achsensymmetrisch ist.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeichnet die Gerade ein.	2 (I)
2	ermittelt einen Ansatz zur Berechnung des Inhalts.	4 (II)
3	berechnet den Inhalt mit Hilfe der Integralrechnung.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	leitet die Parabelgleichung her.	4 (II)
2	berechnet den Inhalt der eingeschlossenen Fläche.	5 (I)
3	zeigt die Gültigkeit der Formel im vorliegenden Fall.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von c durch Einsetzen in die Formel.	4 (III)
2	ermittelt den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von c mit Hilfe der Integralrechnung.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Schnittpunkt …	2 (I)			
2	bestimmt die Nullstellen …	6 (II)			
3	berechnet die notwendigen …	3 (I)			
4	bestimmt die Extrempunkte.	5 (II)			
5	begründet, dass der …	2 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (18): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeichnet die Gerade ein.	2 (I)			
2	ermittelt einen Ansatz …	4 (II)			
3	berechnet den Inhalt …	5 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (11): …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	leitet die Parabelgleichung her.	4 (II)			
2	berechnet den Inhalt …	5 (I)			
3	zeigt die Gültigkeit …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (13): ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt den Inhalt …	4 (III)			
2	ermittelt den Inhalt …	4 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (8): ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Turm besteht aus einem quaderförmigen Grundbau mit einem Spitzdach in Form einer geraden, quadratischen Pyramide (s. *Bild 1*). Die Sonne steht schräg hinter dem Turm und wirft den grau unterlegten Schatten. Zur Unterstützung Ihrer Vorstellung finden Sie am Ende der Aufgabe zusätzlich ein Schrägbild des Turmes.

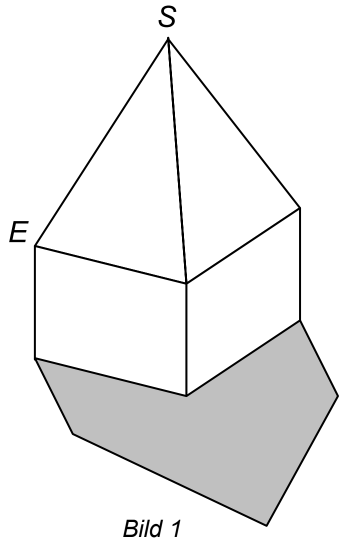


Bild 1

a) *Geben Sie mit Hilfe des Schrägbildes die Koordinaten der Turmspitze S an.* (3 Punkte)

[Hinweis: Die Koordinaten der Turmspitze sind ganzzahlig.]

b) Zu einer anderen Jahreszeit, als in *Bild 1* dargestellt wird, fallen Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein. Die durch die Punkte S und E festgelegte Dachkante erzeugt dabei in der x_1-x_2-Ebene einen Schatten.

Berechnen Sie die Endpunkte und die Länge dieses Schattens. (9 Punkte)

c) Durch $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ wird eine Abbildung α des Raumes festgelegt.

Weisen Sie nach, dass alle Punkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r \in IR$, *durch* α *auf den Punkt* $(a \mid b \mid 0)$ *abgebildet werden.*

Interpretieren Sie die Bedeutung der Abbildung α *im Aufgabenkontext.*

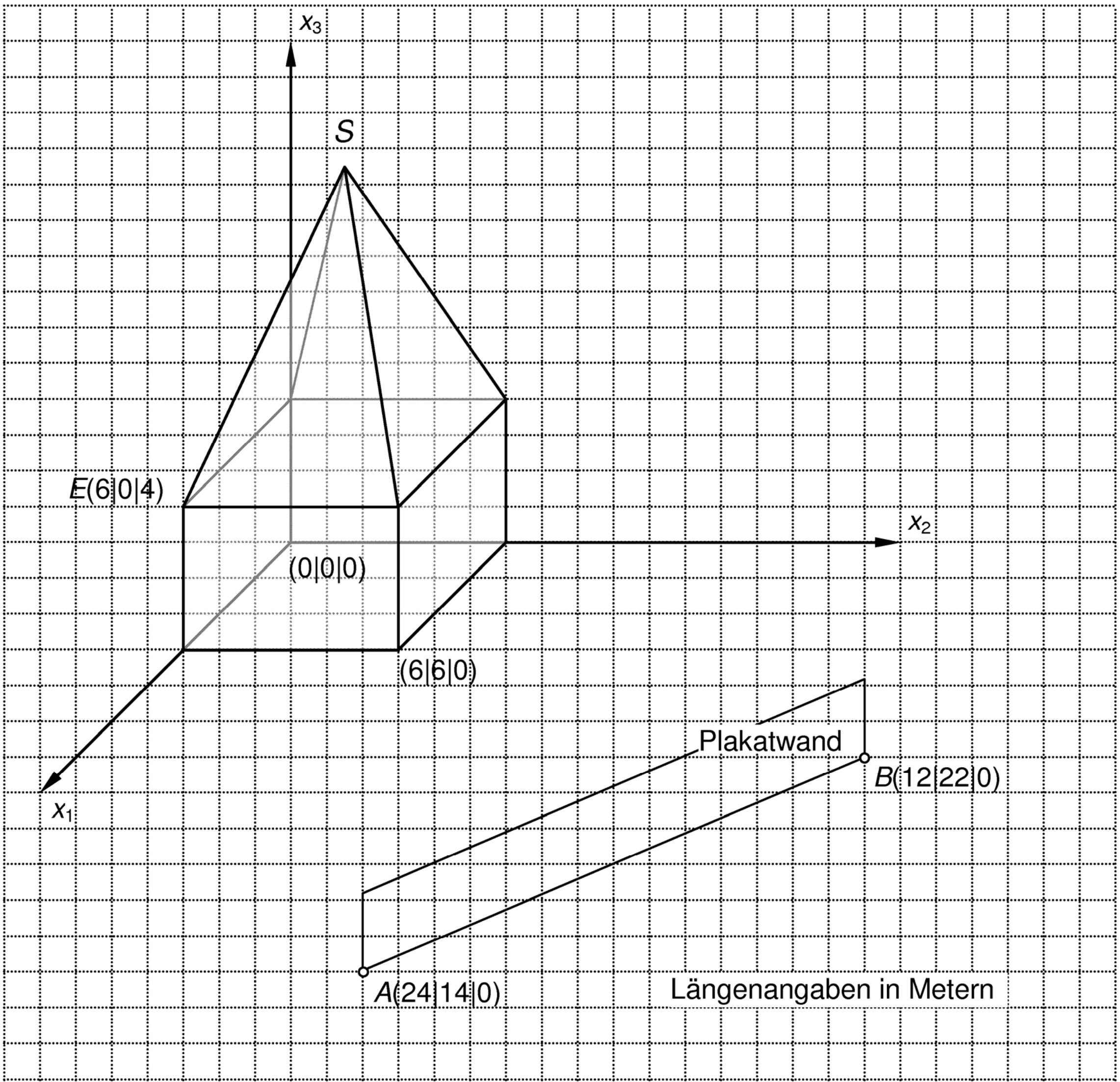
Zeichnen Sie im Schrägbild den von den Sonnenstrahlen aus b) in der x_1-x_2-*Ebene erzeugten Schatten des Turmes ein.* (18 Punkte)

d) Zwischen den Punkten $A(24\,|\,14\,|\,0)$ und $B(12\,|\,22\,|\,0)$ wird eine 2,2 m hohe rechteckige Plakatwand aufgestellt (vgl. Schrägbild).

Entscheiden Sie, ob man den Schatten der Turmspitze jetzt auf der Plakatwand sehen kann. (16 Punkte)

e) *Begründen Sie, dass der Turmschatten symmetrisch ist, wenn die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor* $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ *einfallen.* (4 Punkte)

Schrägbild:



Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für n > 2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit der Anwendung Länge von Vektoren
   - Alternative 1: Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$S(3|3|12)$

Modelllösung b)

$E'(12|6|0)$ und $S'(21|21|0)$ ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit der x_1-x_2-Ebene.

$\sqrt{(21-12)^2 + (21-6)^2} = \sqrt{306} \approx 17{,}5$ ist die gesuchte Länge der Strecke $\overline{E'S'}$.

Falls in a) eine falsche Spitze S abgelesen wurde, führt das nicht zu einem Punktabzug in b).

Modelllösung c)

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung α projiziert also alle Punkte in Richtung der in b) angegebenen Sonnenstrahlen in die x_1-x_2-Ebene. Die Abbildung α bildet jeden Punkt des Raumes auf seinen Schattenpunkt in der x_1-x_2-Ebene, d. h. auf den Erdboden ab. Der Turmschatten ist im Schrägbild eingezeichnet (s. unten).

Modelllösung d)

Es wird der Schnittpunkt S'' zwischen der Schattenlinie der Turmspitze und der Ebene ausgerechnet, die durch die Plakatwand bestimmt ist:

$$\begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12r = -21 + 3t \\ -8r = -11 + 3t \\ s = 12 - 2t \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \wedge t = 5 \wedge s = 2$$

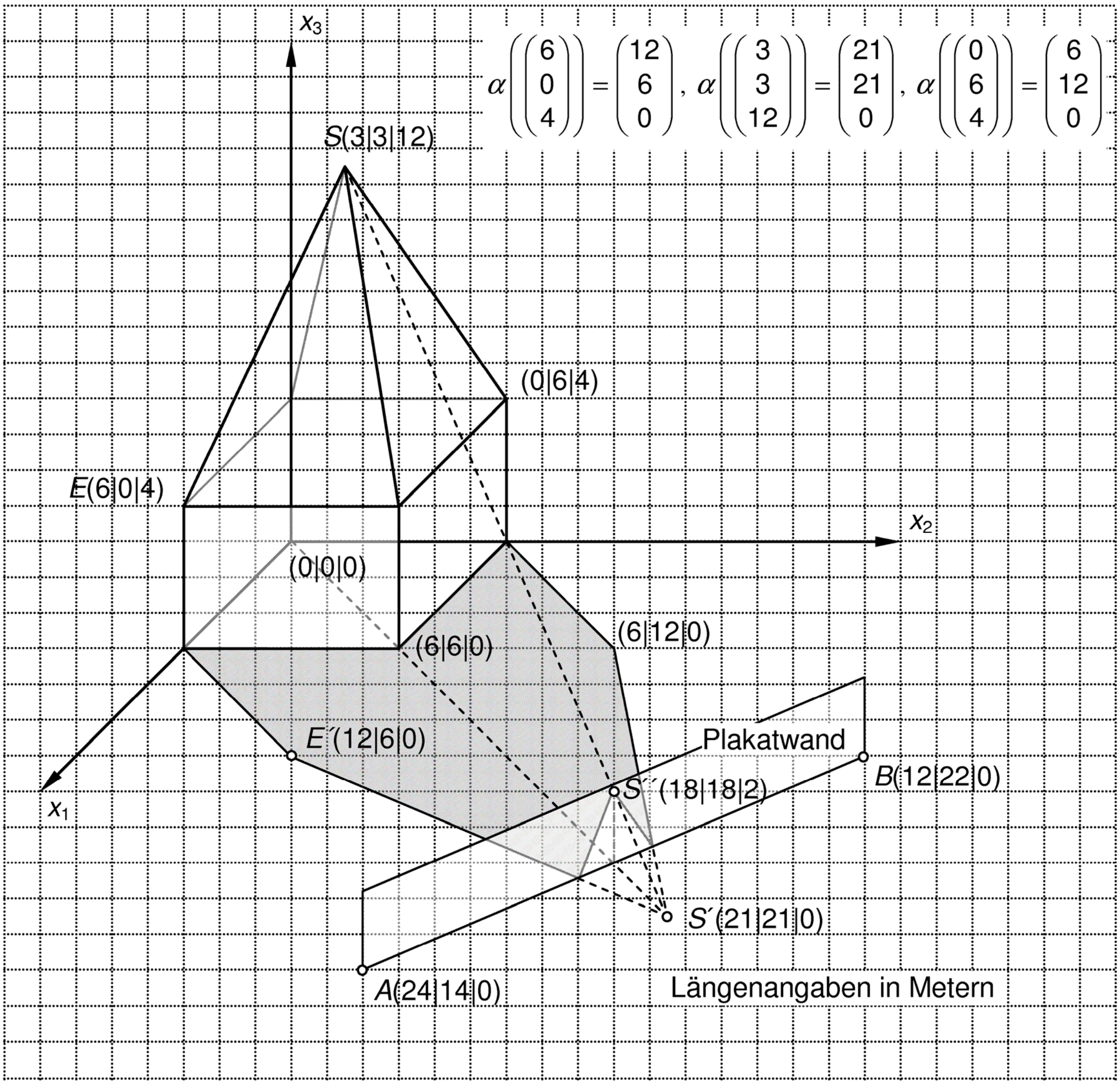
Wegen $\vec{x}_{S''} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $S''(18\,|\,18\,|\,2)$ der gesuchte Schnittpunkt.

Er befindet sich, da seine x1- und x2-Koordinate zwischen den entsprechenden Koordinaten der Punkte A und B liegen ($24 > 18 > 12$ und $14 < 18 < 22$), in 2 m Höhe auf der Plakatwand. Auch andere Argumente oder eine begründete konstruktive Lösung sind denkbar.

Modelllösung e)

Die Ebene $x_1 - x_2 = 0$ ist eine Symmetrieebene des Turmes. Die Sonnenstrahlen fallen, da die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Ebenengleichung erfüllen, parallel zu dieser Symmetrieebene ein und erzeugen deshalb einen symmetrischen Schatten.

Schrägbild:



6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt die Koordinaten der Turmspitze an.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Endpunkte.	6 (I)
2	berechnet die Länge des Schattens.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	weist die Eigenschaft der Geraden bzgl. der Abbildung nach.	6 (II)
2	interpretiert das Ergebnis im Kontext.	3 (III)
3	berechnet die Projektion der Punkte.	5 (I)
4	zeichnet den Turmschatten.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die Ebenengleichung, in der die Plakatwand liegt.	5 (II)
2	bestimmt den Schnittpunkt zwischen der Schattenlinie der Turmspitze und der „Plakatebene“.	6 (II)
3	entscheidet, ob man den Schatten der Turmspitze auf der Plakatwand sehen kann.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	begründet die Symmetrie.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die Koordinaten …	3 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (3): ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**3**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Endpunkte.	6 (I)			
2	berechnet die Länge …	3 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (9): ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist die Eigenschaft …	6 (II)			
2	interpretiert das Ergebnis …	3 (III)			
3	berechnet die Projektion …	5 (I)			
4	zeichnet den Turmschatten.	4 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (18): ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

---

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Ebenengleichung, …	5 (II)			
2	bestimmt den Schnittpunkt …	6 (II)			
3	entscheidet, ob man …	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (16): …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet die Symmetrie.	4 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (4): …………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**4**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

Die Klausur wird mit der Note: ______________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

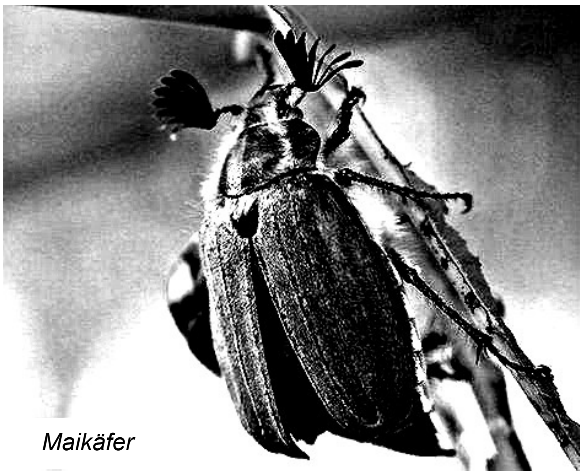
Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die jährliche Entwicklung einer bestimmten Maikäferpopulation mit einem Vier-Jahres-Zyklus wird durch die nebenstehende Matrix beschrieben.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Im Juni des 1. Jahres legt das Weibchen Eier und stirbt bald darauf. Aus etwa 60 Eiern schlüpfen wenig später die Engerlinge.


Maikäfer

In den folgenden Jahren leben die Engerlinge im Boden und richten (bei starkem Bestand) erhebliche Schäden an den Wurzeln von Bäumen und Sträuchern an. Der Engerlingbestand wird von Jahr zu Jahr durch Krankheiten und natürliche Feinde dezimiert.
Im Herbst des 4. Jahres verpuppen sich die Engerlinge. Ein Teil entwickelt sich zu weiblichen Käfern, die dann in der Erde überwintern und im Mai/Juni des nächsten Jahres ins Freie kommen. In diesem Modell überlebt ein Viertel der zweijährigen Engerlinge als weiblicher Käfer.
Bei besonderen klimatischen Bedingungen durchlebt ein Teil der Maikäfer 3-jährige bzw. 5-jährige Zyklen. Diese Möglichkeit wird hier zunächst nicht berücksichtigt.

a) *Stellen Sie die Entwicklung der Maikäferpopulation durch einen Übergangsgraphen dar. Beschreiben Sie die biologische Bedeutung der Koeffizienten der Matrix A und des Matrizenproduktes $A \cdot \vec{x}$, wenn $\vec{x}$ die Anfangsverteilung der Engerlinge verschiedenen Alters ist.* (10 Punkte)

b) *Berechnen Sie aus der nebenstehenden Anfangsverteilung die Verteilungen für die nächsten vier Jahre.* (4 Punkte)

Zahl der Engerlinge am Ende des	1. Jahres	30.000
	2. Jahres	20.000
	3. Jahres	1.600
Zahl der weiblichen Käfer am Ende des 4. Jahres		8.000

c) *Berechnen Sie die Matrix A^2 und beschreiben Sie, wie das Element in der 3. Zeile und der 1. Spalte der Matrix A^2 rechnerisch entsteht.*

Besonders einfach ist die 4. Potenz: $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie, was dieses Ergebnis für die Entwicklung der Population bedeutet.

Zeigen Sie, dass $A^{14} = (A^4)^3 \cdot A^2$ gilt, und berechnen Sie, welche Verteilung sich nach 14 Jahren aus der Anfangsverteilung von b) ergibt. (16 Punkte)

d) *Untersuchen Sie, ob es eine Verteilung gibt, die im nachfolgenden Jahr wieder zu derselben Verteilung führt, und geben Sie diese ggf. an.* (10 Punkte)

e) Durch Klimaveränderungen beeinflusst verpuppen sich $\frac{1}{3}$ der überlebenden einjährigen Engerlinge bereits am Ende des 2. Jahres. Auch von diesen Engerlingen wird ein Viertel im darauf folgenden Jahr zu weiblichen Maikäfern. Der Rest der einjährigen Engerlinge entwickelt sich „normal“.

Bestimmen Sie die neue Übergangsmatrix B. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Alternative 2: Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

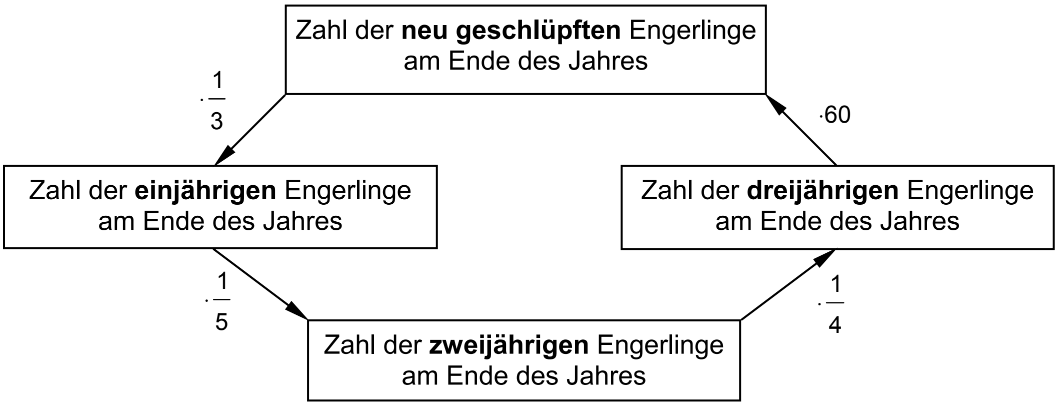
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Da die Maikäferpopulation in unterschiedlichen Formen vorliegt (Käfer/Eier/Engerlinge) sollte die Beschreibung des Modells recht genau vorgenommen werden:



Ein Viertel der zweijährigen Engerlinge werden zu weiblichen Käfern, die im nachfolgenden Jahr für durchschnittlich 60 einjährige Engerlinge sorgen. Nur $\frac{1}{3}$ der neu geschlüpften und $\frac{1}{5}$ der einjährigen Engerlinge überleben. Es gibt in diesem Modell keine anderen Übergänge, d. h., es gibt keine Käferentwicklung bereits nach zwei Jahren Engerlingsdasein.

Das Matrizenprodukt $A \cdot \vec{x}$ liefert aus einer Populationsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} eng_0 \\ eng_1 \\ eng_2 \\ eng_3 \end{pmatrix}$ am Ende eines Jahres die Verteilung der Population am Ende des folgenden Jahres.

Modelllösung b)

Es ergeben sich die folgenden Verteilungen:

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 480\,000 \\ 10\,000 \\ 4\,000 \\ 400 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 24\,000 \\ 160\,000 \\ 2\,000 \\ 1000 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 8\,000 \\ 32\,000 \\ 500 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 20\,000 \\ 1600 \\ 8\,000 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_i$ ist die Verteilung am Ende des *i*-ten Jahres.

Modelllösung c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{14} \cdot \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 20\,000 \\ 1600 \\ 8\,000 \end{pmatrix} = \left(A^4\right)^3 \cdot \left[A^2 \cdot \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 20\,000 \\ 1600 \\ 8\,000 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 24\,000 \\ 16\,000 \\ 2\,000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Das Element $\frac{1}{15}$ ist die Produktsumme der 3. Matrixzeile mit der 1. Matrixspalte.

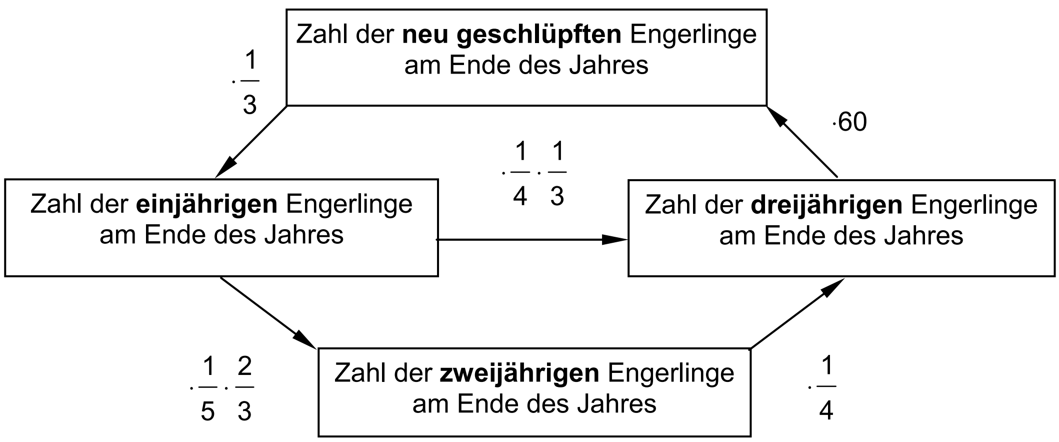
Aufgrund dieses Modells verändert sich die Population wie im Vortext angegeben in einem vierjährigen Zyklus: Nach jeweils vier Jahren stellt sich dieselbe Populationsverteilung ein.

Modelllösung d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 60x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 = x_2 \\ \frac{1}{5}x_2 = x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 = x_4 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 60x_4 = x_1 \\ 20x_4 = x_2 \\ 4x_4 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in IR$$

Es gibt also unendlich viele Verteilungen, die konstant bleiben.

Modelllösung e)



$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 60 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	stellt die Entwicklung der Maikäferpopulation durch einen Übergangsgraphen dar.	5 (II)
2	beschreibt die biologische Bedeutung der Matrixkoeffizienten.	3 (II)
3	beschreibt die biologische Bedeutung des Matrizenproduktes $A \cdot \vec{x}$.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die nächsten vier Verteilungen.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet A^2.	4 (I)
2	beschreibt, wie das Element in der 3. Zeile und der 1. Spalte der Matrix A^2 entsteht.	3 (I)
3	interpretiert das Ergebnis hinsichtlich der Populationsentwicklung.	4 (II)
4	zeigt $A^{14} = (A^4)^3 \cdot A^2$.	2 (II)
5	berechnet die Verteilung nach 14 Jahren.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt den Ansatz an.	2 (I)
2	bestimmt stationäre Verteilungen.	6 (II)
3	ermittelt alle stationären Verteilungen.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	passt den Übergangsgraphen den veränderten Vorgaben an.	5 (III)
2	bestimmt die neue Übergangsmatrix.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_______________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: _______________________________

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt die Entwicklung …	5 (II)			
2	beschreibt die biologische …	3 (II)			
3	beschreibt die biologische …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (10):					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die nächsten …	4 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (4):					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet A^2.	4 (I)			
2	beschreibt, wie das …	3 (I)			
3	interpretiert das Ergebnis …	4 (II)			
4	zeigt $A^{14} = (A^4)^3 \cdot A^2$.	2 (II)			
5	berechnet die Verteilung …	3 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (16):					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	gibt den Ansatz an.	2 (I)			
2	bestimmt stationäre Verteilungen.	6 (II)			
3	ermittelt alle stationären Verteilungen.	2 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (10):					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	passt den Übergangsgraphen …	5 (III)			
2	bestimmt die neue ...	5 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (10):					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

Die Klausur wird mit der Note: ______________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

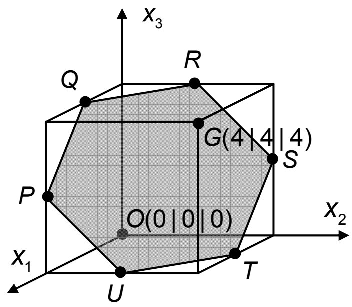
Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen NRW.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:



Der rechts abgebildete Würfel mit der Kantenlänge 4 [LE] hat die gegenüberliegenden Ecken $O(0|0|0)$ und $G(4|4|4)$.
Er wird durch eine Ebene E so in zwei Teile zerlegt, dass als Schnittfläche das grau gefärbte regelmäßige Sechseck entsteht, dessen Ecken die Mittelpunkte $P(4|0|2)$, $Q(2|0|4)$, $R(0|2|4)$, $S(0|4|2)$, $T(2|4|0)$ und $U(4|2|0)$ von sechs Würfelkanten sind.

a) *Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform.*
Geben Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden OG an.
Zeigen Sie, dass die Gerade OG die Ebene E rechtwinklig schneidet, und berechnen Sie den Schnittpunkt M. (16 Punkte)

[Zur Kontrolle: $E: x + y + z = 6$, $M(2|2|2)$]

b) *Zeigen Sie, dass das Dreieck PMQ mit $M(2|2|2)$ gleichseitig ist. Bestimmen Sie seinen Flächeninhalt.*
Berechnen Sie den Umfang des Sechsecks und seinen Flächeninhalt. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: Das Dreieck *PMQ* hat den Flächeninhalt $2\sqrt{3}$ FE.]

c) *Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide, die das Sechseck als Grundfläche und den Punkt G als Spitze hat, und berechnen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens die Pyramide einnimmt.* (8 Punkte)

d) *Zeigen Sie, dass die Gerade* $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in IR$, *in der Ebene E liegt.*

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der Geraden g und der Sechsecksfläche und ermitteln Sie die besondere Lage von g bezüglich des Sechsecks. (14 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

2 Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für n > 2, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Gleichung von E in Parameterform:

Mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ erhält man $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ r, s \in IR$.

[Kontrolle: $x + y + z = (4 - r) + (0 + s) + (2 + r - s) = 6$]

$OG: \ \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in IR$.

Wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$ ist der Richtungsvektor von OG orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren von E und damit orthogonal zur Ebene E.

Schnittpunkt von OG und E:

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t = 4 - r \\ t = s \\ t = 2 + r - s \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = s \\ 2s = 2 + r \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} s = 4 - r \\ t = s \\ 3s = 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r = 2 \\ t = 2 \\ s = 2 \end{array} \right|$$

oder einfacher mit dem Kontrollergebnis für E: $x + y + z = t + t + t = 6 \Rightarrow t = 2$.

Der gesuchte Schnittpunkt von OG und E ist $M(2 \mid 2 \mid 2)$.

Modelllösung b)

Der Punkt $M(2 \mid 2 \mid 2)$ ist der Schnittpunkt der Geraden OG und der Ebene E.

$|PQ| = \sqrt{(2-4)^2 + 0^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ [LE] ,

$|PM| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{8} = |PQ|$,

$|QM| = \sqrt{(2-2)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = |PM|$. Die Punkte P und Q haben denselben Abstand von M und voneinander.

Das gleichseitige Dreieck PMQ hat den Flächeninhalt

$\frac{1}{2} |PQ| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} |PQ| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ [FE].

Das Sechseck hat den Umfang $6 \cdot |PQ| = 12\sqrt{2}$ [LE] und, da es aus 6 (zu PMQ) kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht, den Flächeninhalt $6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ [FE] .

Modelllösung c)

Da die Gerade *OG* das Sechseck in *M* rechtwinklig schneidet, hat die Pyramide die Höhe $|MG| = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{3}$ [LE].

Das Pyramidenvolumen ist daher $\frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$ [VE].

Das Pyramidenvolumen umfasst $\frac{24}{64} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$ des Würfelvolumens.

Modelllösung d)

Wegen $(3-s)+(3-s)+2s = 6$ erfüllt der Geradenterm von *g* die Ebenengleichung von *E* unabhängig vom Laufparameter *s*. Das bedeutet, die Gerade *g* liegt in der Ebene *E*. Die Punkte $A_s(3-s\,|\,3-s\,|\,2s)$, $s \in IR$, $0 \le s \le 2$, der Geraden *g* bilden die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A(3\,|\,3\,|\,0) = A_0$ und $B(1\,|\,1\,|\,4) = A_2$. Die Strecke $\overline{AB}$ liegt in der Sechsecksfläche. *A* und *B* sind die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Sechsecksseiten $\overline{TU}$ und $\overline{QR}$. Die Gerade *g* verläuft daher in der Mitte zwischen den Geraden *QU* und *RT* und parallel zu ihnen; sie ist eine der [sechs] Symmetrieachsen des Sechsecks.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	bestimmt eine Gleichung von *E* in Parameterform.	5 (II)
2	gibt eine Gleichung der Ursprungsgeraden *OG* an.	3 (I)
3	zeigt, dass die Gerade *OG* die Ebene *E* rechtwinklig schneidet.	3 (II)
4	berechnet den Schnittpunkt.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass das Dreieck *PMQ* gleichseitig ist.	4 (II)
2	bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks *PMQ*.	3 (II)
3	berechnet den Umfang des Sechsecks.	2 (I)
4	bestimmt den Flächeninhalt des Sechsecks.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt die Höhe der Pyramide.	3 (II)
2	berechnet das Pyramidenvolumen.	3 (I)
3	berechnet den Anteil des Pyramidenvolumens am Würfelvolumen.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.	5 (II)
2	bestimmt die gemeinsamen Punkte der Geraden und der Sechsecksfläche.	5 (II)
3	ermittelt die besondere Lage von g bezüglich des Sechsecks.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt eine Gleichung …	5 (II)			
2	gibt eine Gleichung …	3 (I)			
3	zeigt, dass die …	3 (II)			
4	berechnet den Schnittpunkt.	5 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (16): ………………………………………… …………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**16**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass das …	4 (II)			
2	bestimmt den Flächeninhalt …	3 (II)			
3	berechnet den Umfang …	2 (I)			
4	bestimmt den Flächeninhalt …	3 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (12): ………………………………………… …………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Höhe …	3 (II)			
2	berechnet das Pyramidenvolumen.	3 (I)			
3	berechnet den Anteil …	2 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (8): …………………………………………………… ……………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass die …	5 (II)			
2	bestimmt die gemeinsamen …	5 (II)			
3	ermittelt die besondere …	4 (III)			
Sachlich richtige Alternativen (14): …………………………………………………… ……………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

Die Klausur wird mit der Note: ______________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ______________________

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Anlässlich der Fußball-Europameisterschaft 2008 in Österreich und der Schweiz plant ein Süßwarenhersteller eine Großproduktion von Überraschungseiern, von denen jedes zehnte – ein so genanntes EM-Ei – eine witzige Fußballfigur enthalten soll. Zum Versand werden Paletten durch ein Zufallsprogramm mit Eiern bestückt. EM-Eier sind von anderen Überraschungseiern äußerlich nicht zu unterscheiden.

a) Philipp kauft in einem Supermarkt zehn Überraschungseier.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er

(1) *im zehnten Ei die erste Fußballfigur findet,*
(2) *in den zehn Eiern genau eine Figur findet,*
(3) *in den zehn Eiern mindestens drei Figuren findet.* (13 Punkte)

b) Wer 10 Fußballfiguren gesammelt hat, nimmt an einer Verlosung für Karten der Europameisterschaftsspiele teil. Philipp hat inzwischen 9 Figuren.

Bestimmen Sie die Zahl n der Überraschungseier, die Philipp noch kaufen muss, um mit 99%iger Sicherheit an der Verlosung teilnehmen zu können. (9 Punkte)

c) An einer 25er-Palette gewöhnlicher Überraschungseier hatte der Supermarkt bislang 5 € Gewinn. In einer Werbeaktion werden jedem Kunden 50 € versprochen, der eine ganze 25er-Palette Überraschungseier kauft und keine einzige Fußballfigur findet. Der Marktleiter geht von dem ungünstigsten Fall aus, dass alle Kunden, die keine Figur finden, sich auch melden und die Prämie einfordern.

Bestimmen Sie den mittleren Gewinn pro Palette, den der Supermarkt während der Werbeaktion erwarten kann. (9 Punkte)

d) Ein Kunde schreibt dem Hersteller: „Nach dem Kauf von zehn Überraschungseiern musste ich zu meiner großen Enttäuschung feststellen, dass keines der Eier eine Figur enthielt.“ Nachdem der Hersteller zahlreiche solcher Briefe erhalten hat, wird beschlossen, den Anteil der Figuren in den Eiern zu erhöhen.
Ermitteln Sie, wie groß der Anteil der EM-Eier an den Überraschungseiern mindestens sein müsste, damit die Kunden mit wenigstens 90%iger Wahrscheinlichkeit erwarten können, in wenigstens einem von zehn gekauften Eiern eine Fußballfigur zu finden.
(9 Punkte)

e) Ein bekannter Discounter lässt exklusiv Überraschungseier mit eigenen EM-Figuren herstellen und verspricht, dass in mindestens der Hälfte seiner Überraschungseier eine Fußballfigur enthalten ist. Philipp möchte die Behauptung des Discounters einem Test unterziehen.

Beschreiben Sie einen solchen Test (Zufallsgröße, begründete Auswahl der Hypothesen) und ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für eine Stichprobe von 50 Eiern und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %. (10 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,5	
0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99
1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	98
2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	97
3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	96
4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	95
5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	94
6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	93
7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	92
8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	91
9		0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	90
10		0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	89
11		0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	88
12		0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	87
13		0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0000	86
14		0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0000	85
15			0,9601	0,1285	0,0111	0,0000	84
16			0,9794	0,1923	0,0211	0,0000	83
17			0,9900	0,2712	0,0376	0,0000	82
18			0,9954	0,3621	0,0630	0,0000	81
19			0,9980	0,4602	0,0995	0,0000	80
20			0,9992	0,5595	0,1488	0,0000	79
21			0,9997	0,6540	0,2114	0,0000	78
22			0,9999	0,7389	0,2864	0,0000	77
23				0,8109	0,3711	0,0000	76
24				0,8686	0,4617	0,0000	75
25				0,9125	0,5535	0,0000	74
26				0,9442	0,6417	0,0000	73
27				0,9658	0,7224	0,0000	72
28				0,9800	0,7925	0,0000	71
29				0,9888	0,8505	0,0000	70
30				0,9939	0,8962	0,0000	69
31				0,9969	0,9307	0,0001	68
32				0,9984	0,9554	0,0002	67
33				0,9993	0,9724	0,0004	66
34				0,9997	0,9836	0,0009	65
35				0,9999	0,9906	0,0018	64
36					0,9948	0,0033	63
37					0,9973	0,0060	62
38					0,9986	0,0105	61
39					0,9993	0,0176	60
40					0,9997	0,0284	59
41					0,9999	0,0443	58
42						0,0666	57
43						0,0967	56
44						0,1356	55
45						0,1841	54
46						0,2421	53
47						0,3086	52
48						0,3822	51
49						0,4602	50
50						0,5398	49
51						0,6178	48
52						0,6914	47
53						0,7579	46
54						0,8159	45
55						0,8644	44
56						0,9033	43
57						0,9334	42
58						0,9557	41
59						0,9716	40
60						0,9824	39
61						0,9895	38
62						0,9940	37
63						0,9967	36
64						0,9982	35
65						0,9991	34
66						0,9996	33
67						0,9998	32
	0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,5	*k*
	p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + ... + B(n;p;k) \quad = \quad \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + ... + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

k	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,5	
0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	49
1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	48
2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	47
3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	46
4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0000	45
5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0000	44
6		0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0000	43
7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0000	42
8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0000	41
9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0000	40
10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0000	39
11			0,9968	0,7107	0,3816	0,0000	38
12			0,9990	0,8139	0,5110	0,0002	37
13			0,9997	0,8894	0,6370	0,0005	36
14				0,9393	0,7481	0,0013	35
15				0,9692	0,8369	0,0033	34
16				0,9856	0,9017	0,0077	33
17				0,9937	0,9449	0,0164	32
18				0,9975	0,9713	0,0325	31
19				0,9991	0,9861	0,0595	30
20				0,9997	0,9937	0,1013	29
21				0,9999	0,9974	0,1611	28
22					0,9990	0,2399	27
23					0,9996	0,3359	26
24					0,9999	0,4439	25
25						0,5561	24
26						0,6641	23
27						0,7601	22
28						0,8389	21
29						0,8987	20
30						0,9405	19
31						0,9675	18
32						0,9836	17
33						0,9923	16
34						0,9967	15
35						0,9987	14
36						0,9995	13
37						0,9998	12
	0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,5	*k*
	p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000
Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Tabelle 3: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

$\phi(z) = 0{,}994 \Rightarrow z = 2{,}51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2007

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

2 Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

4. Bezüge zu den Vorgaben 2007

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Einseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der EM-Eier. X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,1$.

(1) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $0,9^9 \cdot 0,1 \approx 0,0387$

(2) $P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^9 \approx 0,3874$

(3) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,1 \cdot 0,9^9 - \binom{10}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^8 \approx 0,0702$

Modelllösung b)

$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01 \geq 0{,}9^n \Leftrightarrow \lg 0{,}01 \geq n \lg 0{,}9 \Leftrightarrow 43{,}7 \leq n$.

Philipp muss mindestens noch 44 Überraschungseier kaufen.
Alternativ kann die Lösung auch durch gezieltes Probieren gefunden werden.

Modelllösung c)

Die Zufallsgröße Y bezeichne den Gewinn des Supermarkts pro Palette.
Mit $P(Y = 5) = 1 - 0{,}9^{25}$ und $P(Y = -45) = 0{,}9^{25}$ folgt
$E(Y) = 5 \cdot (1 - 0{,}9^{25}) - 45 \cdot 0{,}9^{25} \approx 1{,}41$. Der Erwartungswert für den Gewinn des Supermarktes pro 25er-Palette beträgt demnach 1,41 €.

Modelllösung d)

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - (1-p)^{10} \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - p \leq \sqrt[10]{0{,}1} \Leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[10]{0{,}1} \approx 0{,}2057$.

Der Anteil der EM-Eier muss mindestens rund 20,6 % betragen.

Modelllösung e)

Die Zufallsgröße Z gibt die Zahl der Fußballfiguren in einer Stichprobe von $n = 50$ Überraschungseiern an. Der unbekannte Parameter der Binomialverteilung sei p. Getestet wird $H_0: p \geq 0{,}5$ gegen $H_1: p < 0{,}5$, wenn man davon ausgeht, dass Philipp die Angaben des Discounters bezweifelt, sich jedoch gegen eine Fehleinschätzung (Fehler 1. Art) absichern möchte, bevor er z. B. einen Brief an den Discounter schreibt.
Die Tabelle der kumulierten Binomialverteilung für $n = 50$ liefert $P(Z \leq 18) \approx 0{,}0325$ und $P(Z \leq 19) \approx 0{,}0595$. Demnach lautet die Entscheidungsregel, dass die Hypothese $H_0: p \geq 0{,}5$ bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % abzulehnen ist, wenn die gekaufte Stichprobe höchstens 18 EM-Eier enthält.
Geht man davon aus, dass Philipp den Angaben des Discounters grundsätzlich traut, aber ein Interesse daran hat, sicherzugehen, bevor er sich z. B. auf einen größeren Kauf einlässt oder anderen zum Kauf rät, so wird $H_0: p < 0{,}5$ gegen $H_1: p \geq 0{,}5$ getestet. In diesem Fall ist $P(Z \geq 32) \approx 0{,}0325$ und $P(Z \geq 31) \approx 0{,}0595$. Die Hypothese $H_0: p < 0{,}5$ ist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% abzulehnen, wenn die gekaufte Stichprobe mehr als 31 EM-Eier enthält.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	berechnet P(*„Im zehnten Ei ist die erste Figur“*).	3 (I)
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit $P(X=1)$.	4 (I)
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$.	6 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt einen Lösungsansatz für n .	5 (II)
2	bestimmt n.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten des Supermarktes.	6 (II)
2	berechnet den Erwartungswert des Gewinns.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt den Lösungsansatz für p.	5 (III)
2	berechnet p.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

1 AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt einseitigen Hypothesentest zur Ablehnung von $p \geq 0{,}5$ oder $p < 0{,}5$.	6 (II)
2	ermittelt eine Entscheidungsregel, bei der in der Antwort auf den Kontext wieder Bezug genommen wird.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet P(*„Im …*	3 (I)			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	4 (I)			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	6 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (13):					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen Lösungsansatz …	5 (II)			
2	bestimmt n.	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (9):					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Gewinn- …	6 (II)			
2	berechnet den Erwartungswert …	3 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (9):					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Lösungsansatz …	5 (III)			
2	berechnet *p*.	4 (I)			
Sachlich richtige Alternativen (9):					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt einseitigen Hypothesentest …	6 (II)			
2	ermittelt eine Entscheidungsregel, …	4 (II)			
Sachlich richtige Alternativen (10):					
	Summe Teilaufgabe e)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			
	aus der Punktsumme resultierende Note				
	Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
	Paraphe				

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13,2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

Die Klausur wird mit der Note: ______________________________________ (____Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0